Cem Tezer

Çakılarası Geometri Dersleri

(1)

Cem Tezer

Çakılarası

Geometri Dersleri

(1)

Cem Tezer

Ankara

2017

* Yönlü miktarlar : Sadece kesirler değil, çarpımlar da

$PQ \cdot PR = 60$

$QP \cdot QR = -24$

A . Üçgenler, Dikkate Değer Nokta ve Çemberler

§1 Tales Teoremi :

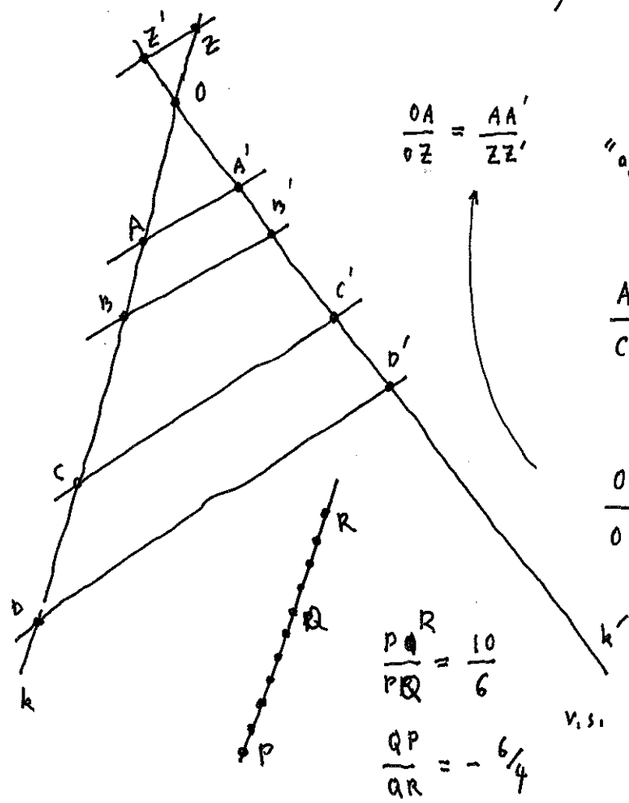
Θαλες	-624/-547 İyonya "Hükema-yı Sitte" arasında...

Öklid
Bu teorem Euclide geometrisinin kalbidir. Öklid dışı geometrilerde, (bu teoremin esas unsuru olan) paralellik mefhumu, kuvvetini kaybeder, en azından tabiatı değişir.

Yönlü çokluklarin kullanilmasi mühimdir : $\lambda = \frac{PQ}{RS}$ (Mutad ikaz: $R \neq S$!)

(Burada, P, Q, R, S aynı doğru üzerinde olmalı. Ya da $PQ \parallel RS$ olmalı...)

sayisi - analitik geometri vasitasiyla $\overrightarrow{PQ} = \lambda \overrightarrow{RS}$ denklemiyle tarif edilebilir. Gençler için "aynı yön" & "ters yön"...



$\frac{OA}{Oz} = \frac{AA'}{zz'}$

$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$ ve ila ahere...

&

$\frac{OA}{OB} = \frac{AA'}{BB'} =$ ve ...

$\frac{PQ}{PR} = \frac{10}{6}$

$\frac{QP}{QR} = -\frac{6}{4}$

Ara : Öklid geometrisinde uzunluk yoktur...

(*) Aralık : Matematikte { "aksiyomlar"
"tanımsız unsurlar" (primitive notions.)

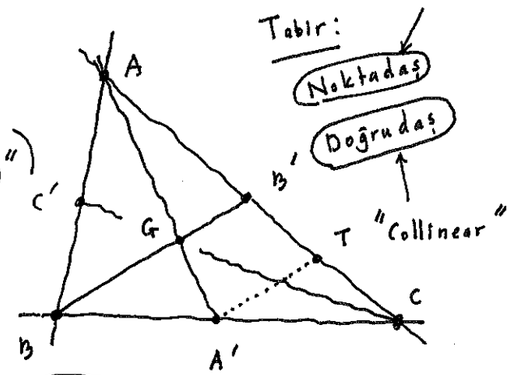
Misaller : | Grup teorisi
Geometri |

mütün üçgenleri
(*) eşkenar çizme salaklığı | !

§2. Ağırlık merkezi : (Üçgende)

Yaygın
Yerleşik gösterim: G ("centroid" "centre of gravity")

GA' : GA = -1 : 2

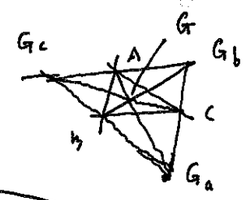


Tabir: "Concurrent" — Noktadaş
"Collinear" — Doğrudaş

Istılahat : Kenarortay, "vasat" Ortalar Üçgeni
A'B'C' : "The medial triangle"

Dikkat ! 1) G aynı zamanda A'B'C' nün de ağırlık merkezidir.
2) ABC yi ara üçgen kabul eden üçgen : $G_a G_b G$
"The antimedial triangle".

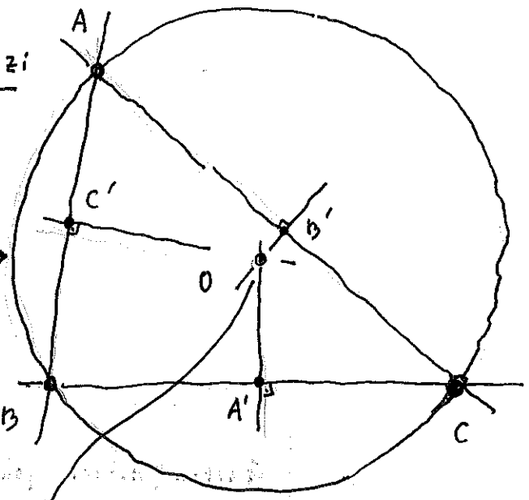
İhtar: G aynı zamanda $G_a G_b G_c$ nin de ağırlık merkezidir.



Ters Ortalar Üçgeni

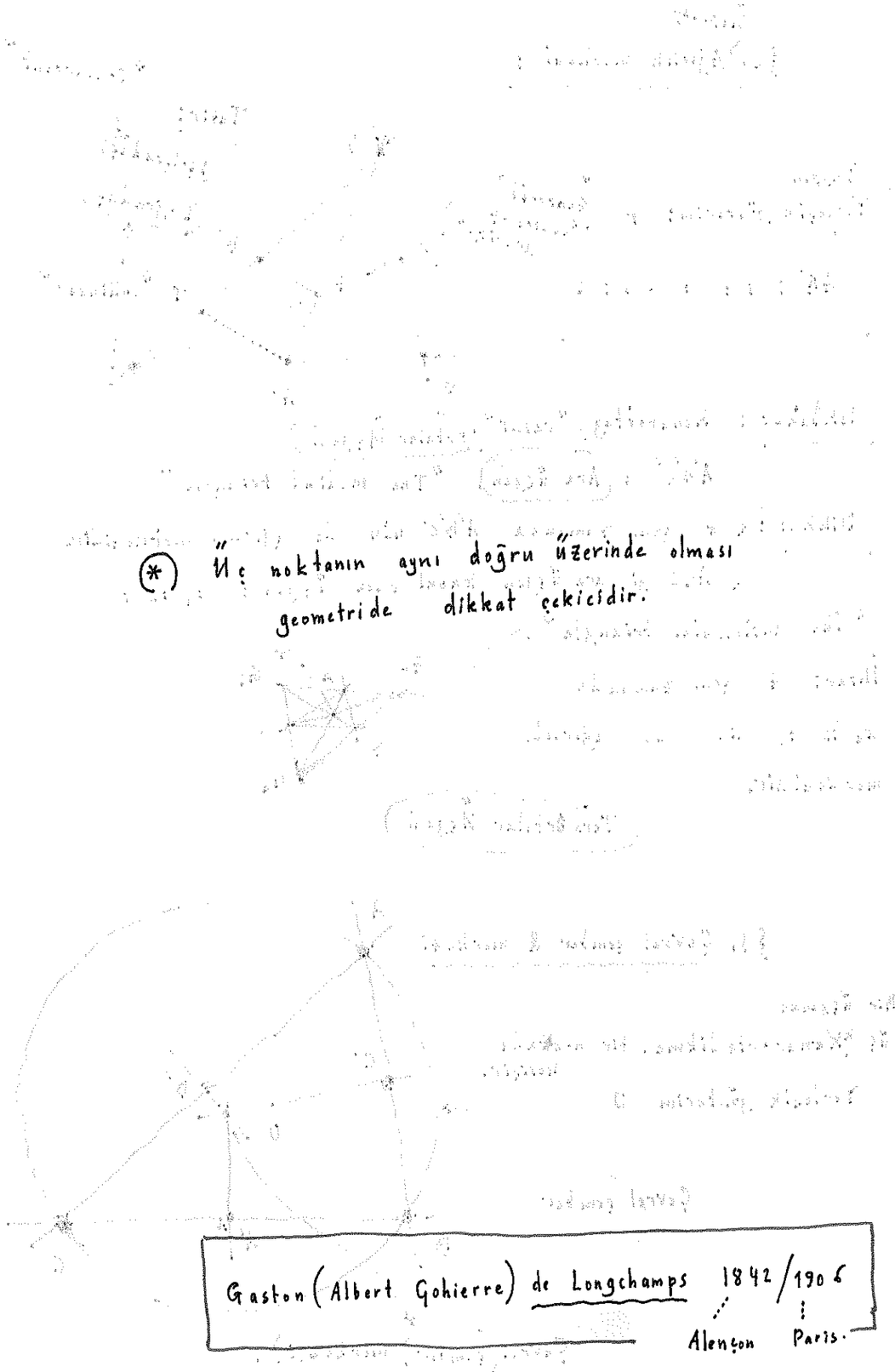
§3. Çevrel çember & merkezi

Bir üçgende üç kenarortadikme bir noktada kesişir.
Yerleşik gösterim O



Çevrel çember

Çevrel (çember) merkez(i).

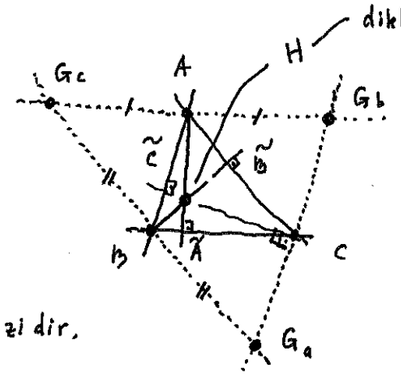


(*) Üç noktanın aynı doğru üzerinde olması geometride dikkat çekicidir.

Gaston (Albert Gohierre) de Longchamps 1842/1906
Alençon Paris.

§4. Diklik Merkezi :

bir üçgende üç yükseklik/dikme noktadaştır.



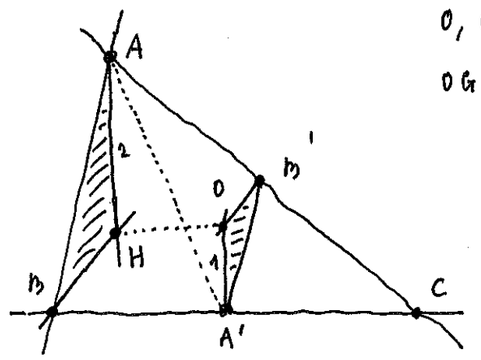
! | ABC nin diklik merkezi H, $G_a G_b G_c$ nin çevrel merkezidir.

Ben kullanacağım: $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$: Yükseklik ayakları...

! | Benzer şekilde : ABC nin çevrel merkezi O, A'B'C' nün diklik merkezidir.

§5. Euler Doğrusu :

Leonhard Euler (1707-1783)
Basel
Санкт-Петербург
Sen Petersburg

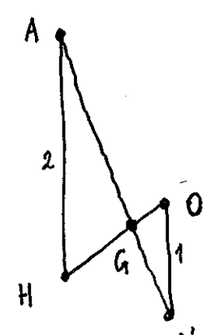


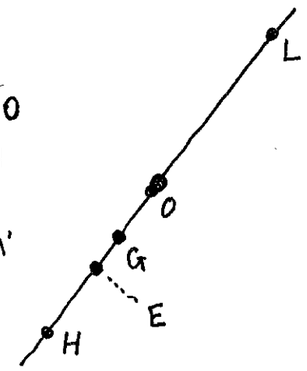
O, G, H noktaları doğrudaştır.

OG = OH doğrusu : "Euler doğrusu"...

Ayrıca :

GO ; GH = -1 ; 2





Yakında : E, [OH] nin ortanoktası

Euler

L : LH : LO = 2 : 1.

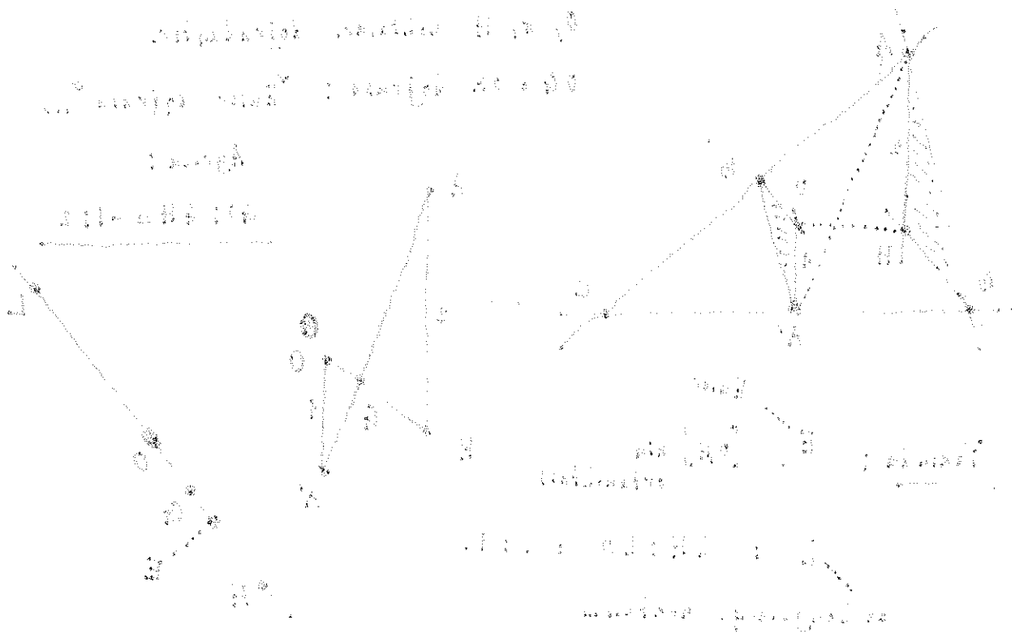
L ... de Longchamps noktası...

(*) Dikkat! $(A,B;C,D) = m(B,A;C,D)^{-1}$

$= A(A,B;D,C)^{-1}$

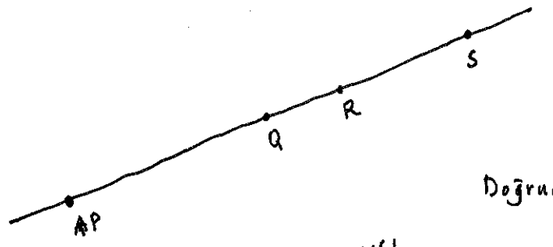
$= (B,A;D,C)$

Noktaların hiç biri diğeriyle çakışmasın!



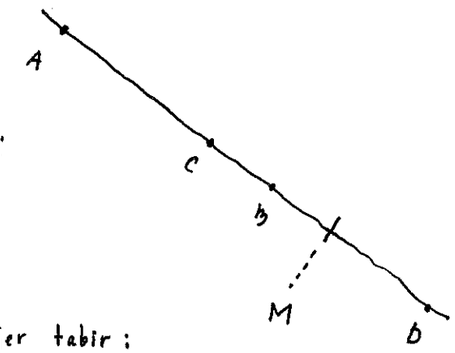
§6. Çifte Oran, Harmonik Bölme:

"Cross ratio" "rapport anharmonique" "Doppelverhältnis"



Doğrudaş P, Q, R, S noktalarının $\left(\begin{matrix} P\neq R \\ Q\neq S \end{matrix}\right)$ çifte oranı $(P,Q;R,S) = \frac{RP}{RQ} : \frac{SP}{SQ}$ olarak sunulan sayıdır.

Eğer $(A,B;C,D) = -1$ ise, dörtlü doğrudaş A, B, C, D noktalarının — sıra! — bir "harmonik bölme" teşkil ettikleri'ni söyleyeceğiz. Aynı manada diğer tabir:



" C ... nokta sı A, B noktalarına göre D nin harmonik eşleniği dir. " (C ve D yer değiştirebilir. / A ve B " ")

Misal: $(H,O;G,L) = -1$

$(H,G;E,O) = -1$

Mühim bir bağıntı: ... nın gerek ve yeter şart!

A, B; C, D noktaları bir harmonik dörtlü ise ve M noktası [CD] doğru parçasının orta noktası ise

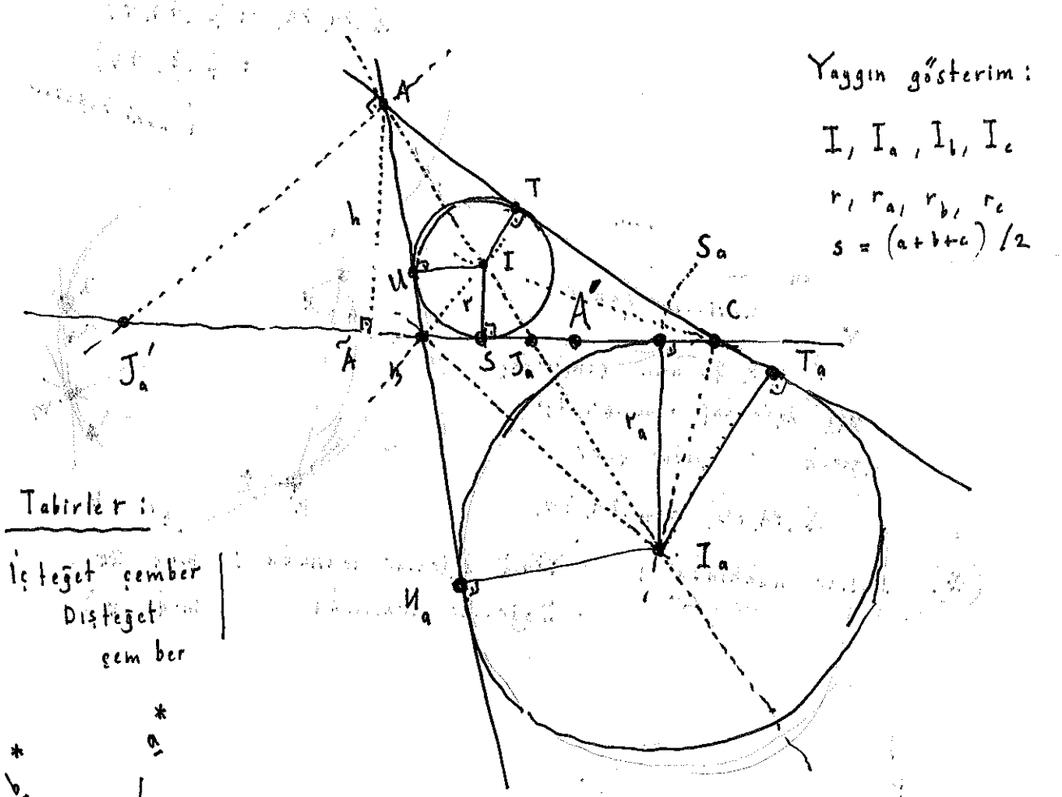
$\frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} = -1$

$m = \frac{c+d}{2}$

$|MC|^2 = MA \cdot MB$

İspat: Noktaları - keyfi bir başlangıç noktasına göre koordinatlarıyla belirleyelim...

§7. Teğet Çemberler, Merkezleri, Açıortaylar



Yaygın gösterim:

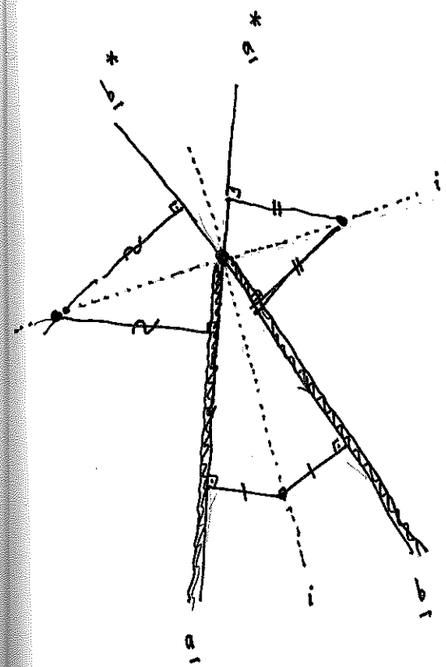
I, I_a, I_b, I_c

r, r_a, r_b, r_c

$s = (a+b+c)/2$

Tabirler:

İç teğet çember | Dış teğet çember



Malum hesaplar: $|SB| = |S_aC| = s-b$

$\Delta = sr = (s-a)r_a$

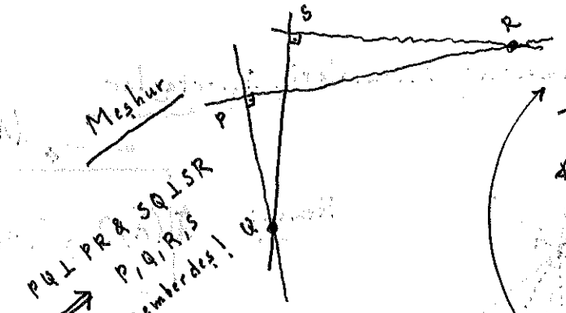
İç ve dış açıortaylar...

Yarı doğrular (veya yönlü doğrular)

Açı

$\underline{a}, \underline{b}$ yarıdoğruları i doğrusuna göre birbirlerinin yansımasıdır. ⇒ iç açıortay...

$\underline{a}, \underline{b}^*$ yarıdoğruları ve ($\underline{a}^*, \underline{b}$ yarıdoğruları) i' doğrusuna göre birbirlerinin yansımasıdır. ⇒ dış açıortay...

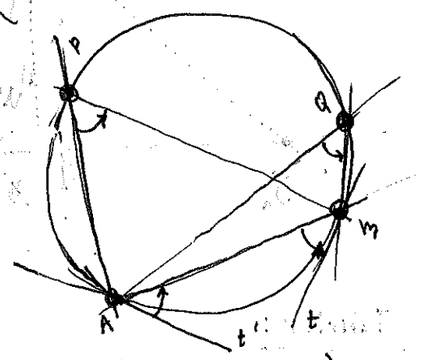


Meşhur

$PQ \perp PR$ & $SQ \perp SR$
$\Rightarrow$ P, Q, R, S çemberdeş!

Dikkat:

$\measuredangle(PA, PB) = \measuredangle(AB, t)$ (B deki teğet...
$= \measuredangle(t', AB)$
A deki teğet...

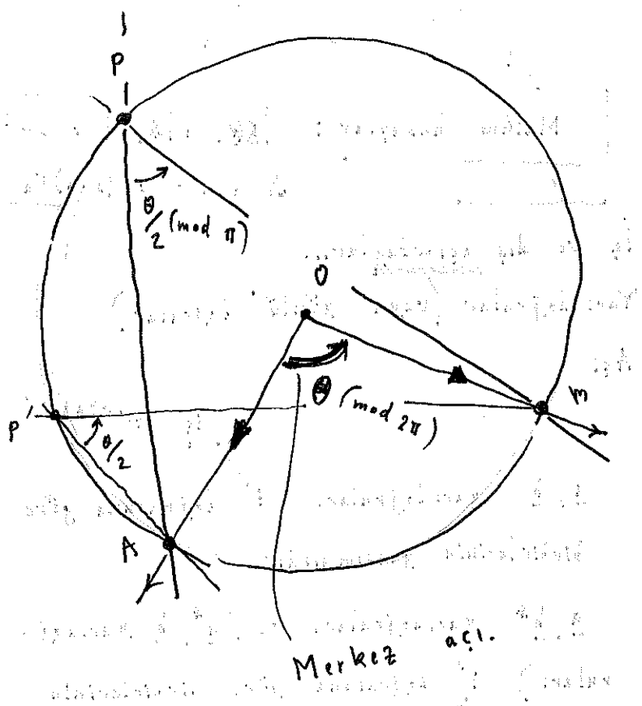


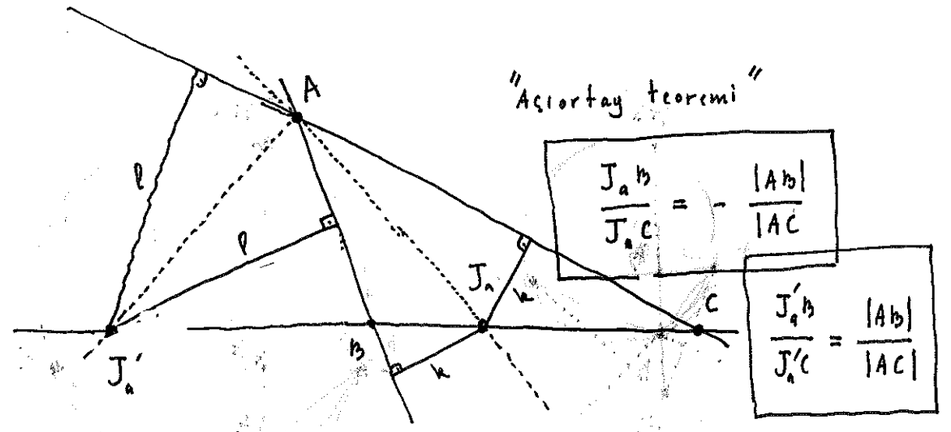
Tabii, bu bağıntının en kullanışlı neticesi şudur:

A, B, P, Q nun çemberdeş veya doğrudaş olmaları için gerek ve yeter şart

$\measuredangle(PA, PB) = \measuredangle(QA, QB)$

(*) **Açılar hakkında:** (Yönlü doğrular arasında ; mod 2π)
Doğrular arasında : mod π)





"Açıortay teoremi"

$$\frac{J_aB}{J_aC} = -\frac{|AB|}{|AC|} \qquad \frac{J_a'B}{J_a'C} = \frac{|AB|}{|AC|}$$

$$\boxed{(B, C; J_a, J_a') = -1} : = \frac{J_aB}{J_aC} : \frac{J_a'B}{J_a'C} = \left(-\frac{\text{Alan}(J_aBA)}{\text{Alan}(J_aAC)}\right) : \left(\frac{\text{Alan}(J_a'BA)}{\text{Alan}(J_a'AC)}\right)$$

$$= \left(-\frac{h_c}{k_b}\right) : \left(\frac{p_c}{p_b}\right) = -1$$

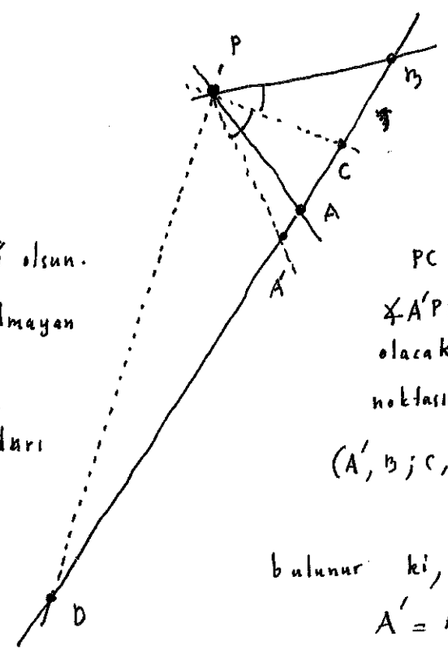
B, C, J_a, J_a' dörtlüsü bir harmonik dörtlü dür. !

Aynı şekilde ! BJ_aA üçgeninde açıortay teoremi...

$$(\tilde{A}, J_a; S, S_a) = (A, J_a; l, l_a)$$

* | Açıortay teoreminin mühim bir tersi | !

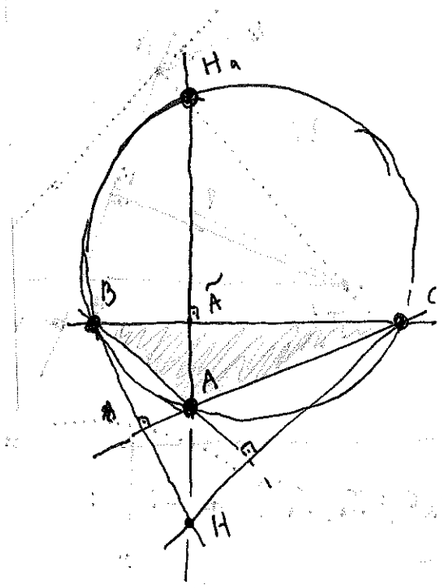
A, B; C, D bir harmonik dörtlü olsun.
Bu bölmenin doğrusu üzerinde olmayan bir P noktası alınsa:
PC, PD nin APB açısında açıortay olmaları için gerek ve yeter şart
$PC \perp PD$ dir...



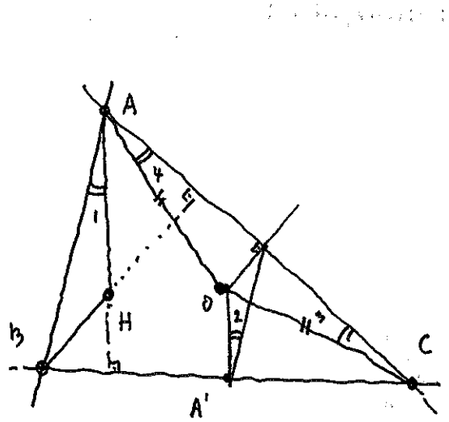
PC doğrusu, $\measuredangle A'PB$ nin iç açıortayı olacak şekilde bir A' noktası alınırsa, o zaman

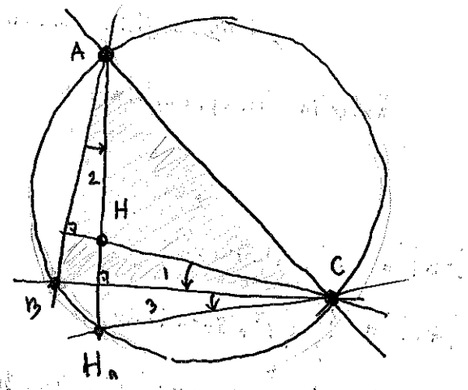
$(A', B; C, D) = -1$
$= (A, B; C, D)$

bulunur ki, bundan da $A' = A$ çıkar !



§8'. Hnin kenarlarda yansıması çevrel çember üzerinde kalır:



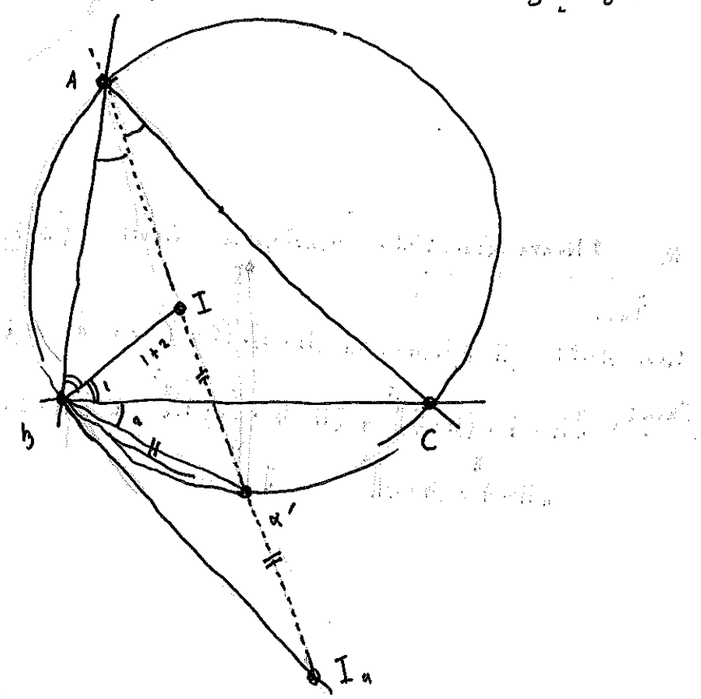


§8' $\measuredangle(AB, AH) = \measuredangle(AO, AC)$

§8''

α', A dan geçen İçaçıortayın çevrel çemberi ikinci defa kestiği nokta olsun. (α' aynı zamanda B ve C ve Ia noktalarını birleştiren ve A dan geçmeyen yayın ortanoktasıdır!)

$$|\alpha' I| = |\alpha' B| = |\alpha' I_a|$$
$$\| \quad |\alpha' C|$$



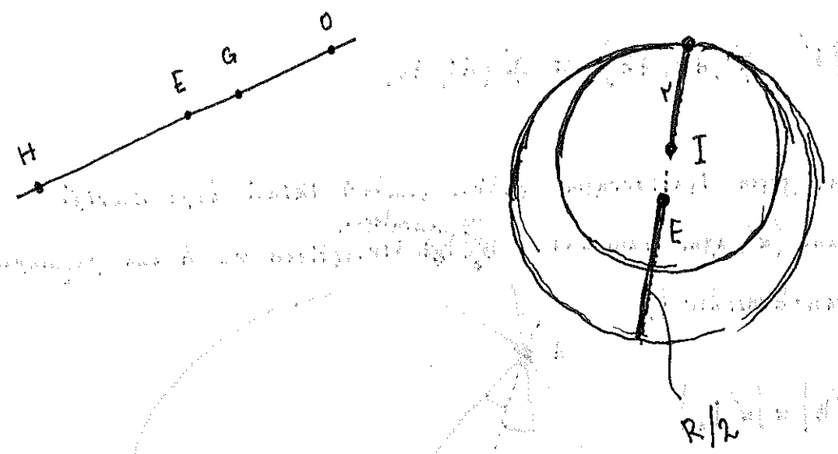
Emin değilim, makaleyi inceleyelim !

Euler'in hesapladıkları

$$|OH|^2 = 9R^2 - a^2 - b^2 - c^2$$

$$|GI|^2 = \tfrac{1}{9}\left(s^2 + 5r^2 - 16Rr\right)$$

$$|GI_a|^2 = \tfrac{1}{9}\left[s^2 + 6r_a^2 - r^2 + 4R\left(3r_a - r\right)\right]$$



⊛ 9 Nokta Çemberi'nin vektörlerle ispatı (D. Pedoe : "A Course of Geometry for Colleges & Universities" p. 39.)

Önce $(H-A).(B-C) = (H-B).(C-A) = 0 \Longrightarrow (H-C).(B-A) = 0$ olduğunu görelim.

Sonra $\|H-A-(B-C)\|^2 = \|H-A+(B-C)\|^2$ den

$\|H+C-(A+B)\| = \|H+B-(C+A)\|$ ve benzer şekilde

$= \|H+A-(B+C)\|$ bulunur ki $E = \frac{3}{4}\frac{A+B+C}{3} + \frac{1}{4}H$

$= \frac{1}{4}(A+B+C+H)$

yazarak,

$$\|E - \tfrac{B+C}{2}\| = \|E - \tfrac{C+A}{2}\| = \|E - \tfrac{A+B}{2}\| = \|E - \tfrac{H+A}{2}\| = \|E - \tfrac{H+B}{2}\| = \|E - \tfrac{H+C}{2}\|$$

Tabii [AX] bir çaptır. Bu da $\tilde{A}$ (ve benzer olarak) $\tilde{B}$, $\tilde{C}$ noktalarını halleder...

§9. Dokuz Nokta Çemberi

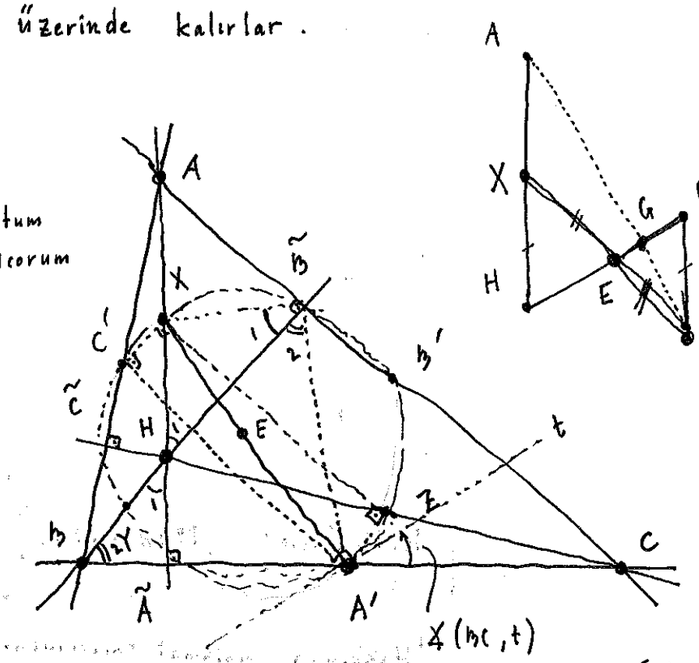
Bir üçgende, kenar orta noktaları, yükseklik ayakları, diklik merkezini köşelere birleştiren doğru parçalarının orta noktaları aynı çember üzerinde kalırlar.

L. Euler:

"Solutio Facilis Problematum Quorundam Geometricorum Difficilimorum"

Novi Commentarii Academia Scientarium Imperialis Petropolitanae 11 (1765) 103-123

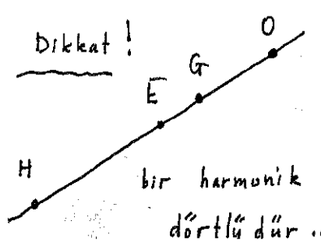
Neşredilmesi 1767 de.



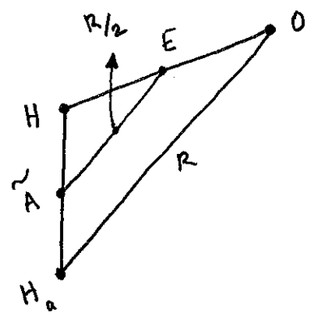
Bu çemberin merkezi [OH] nin orta noktasıdır. (E)

Yarıçapı da $R/2$ dir...

Dikkat !



bir harmonik dörtlü dür ...

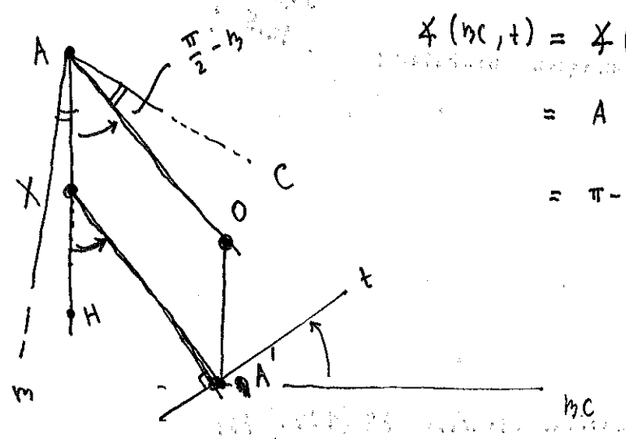


H. M. Taylor (1842 - 1927) (?)

Hakkında malumat bulamadım.

§9'. 9 nokta çemberinin A' noktasındaki teğeti t olsun:

$$\measuredangle(\eta c, t) = \eta - C$$ dir.

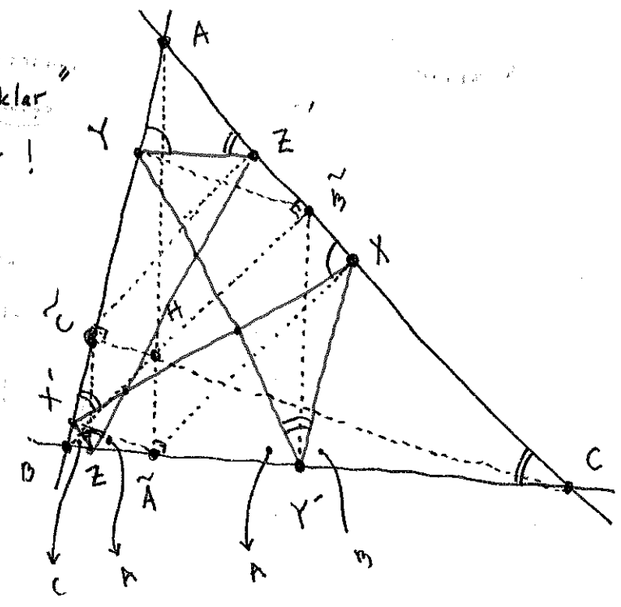


$$\measuredangle(\eta c, t) = \measuredangle(AH, AO)$$
$$= A - 2\left(\frac{\pi}{2} - \eta\right) = A + 2\eta - \pi$$
$$= \pi - C + \eta - \pi = \eta - C$$

§10. Taylor Çemberi

Bir üçgende yüksekliklerin "ikinci ayakları" aynı bir çember üzerindedir!

İpucu: $YZ' \parallel BC$ olup, X, X', η, C çemberdeştir...



(Pierre René Jean-Baptiste) Henri Brocard (1845-1922)
Vignot Bar-le-duc.

Brocard noktalarına benzeyen noktalar:

sayfa 12.5 !

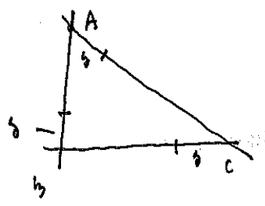
E 2312 *Proposed by* Huseyin Demir, *Middle East Technical University, Ankara, Turkey*

Let D be a point in the plane of a positively oriented triangle ABC and let AD, BD, CD intersect the respective opposite sides in A_1, B_1, C_1. If the oriented segments $\overline{BA_1}$, $\overline{CB_1}$, $\overline{AC_1}$ are equal ($= \delta$), then D is uniquely determined and lies in the interior of ABC. (Notice the analogy between D and the Brocard point Ω.)

American Mathematical Monthly 78 (1971) 793

→ ilerde

Çözüm: (Michael Goldberg)



Ceva teoremi: $(a-\delta)(b-\delta)(c-\delta) = \delta^3$

$\delta \in [0, \min(a,b,c)]$ olarak artarken,
sol taraf da abc den 0 a iner. (Monoton!)
Ara değer teoremi...

δ uzunluğu diğer noktalardan alınarak da yapılabilir.
Uzunlukça eşlenik ⟷ ilerde.

Ne yazık ki bu güzel doku daha önceden keşfedilmiş ve teferruatlı bir şekilde incelenmiş:

Peter Yff: "An analogue of the Brocard points"
American Mathematical Monthly 70 (1963) 495-501

§11. Brocard Noktaları

$\measuredangle(BC, \Omega B) = \measuredangle(CA, \Omega C) = \measuredangle(AB, \Omega A) = \omega$

&

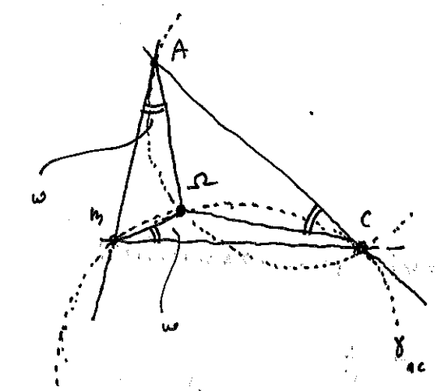
$\measuredangle(\Omega'C, CB) = \measuredangle(\Omega'A, CA) = \measuredangle(\Omega'B, AB) = \omega$

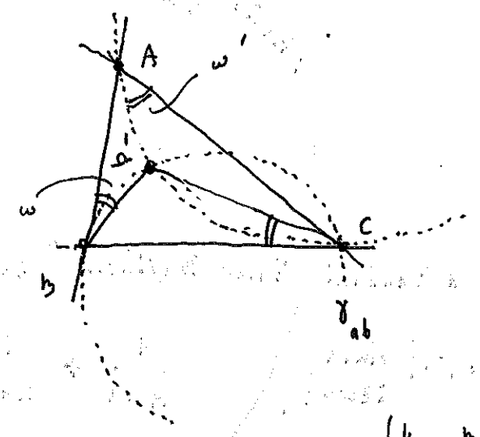
"Brocard açısı"!

olacak şekilde Ω ve Ω' noktaları vardır. ("Brocard Noktaları")

Bu noktaların varlığı iki şekilde tesbit edilebilir:

(1) $\gamma_{ac}, \gamma_{ba}, \gamma_{cb}$ çemberleri ω Ω noktasında
$\gamma_{ab}, \gamma_{bc}, \gamma_{ca}$ çemberleri de Ω' noktasında kesişirler!





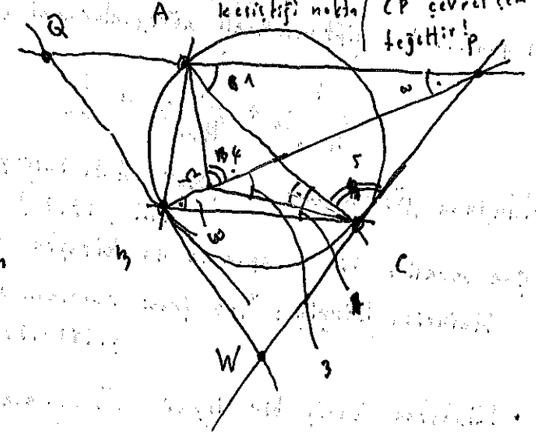
(2) $B\Omega$, A dan BC ye çizilen paralelle, çevrel çembere C den çizilen teğetin kesim noktasından geçer... (P!)

$C\Omega'$, A dan BC ye çizilen paralelle, çevrel çembere B den çizilen teğetin kesim noktasından geçer (Q!)

Dikkat: WPQ ikizkenar olduğundan, $\omega = \omega'$ dür.

P, A dan BC ye çizilen teğetle $B\Omega$ nın A kesiştiği nokta

$\left.\begin{array}{l} 4 = 6 = 5 \\ \text{olduğundan:} \\ CP \text{ çevrel çembere} \\ \text{teğettir!} \end{array}\right\}$



Dikkat! C, Ω, A, P çemberdes!

Henüz incelemedim ama bu azimli kişi benzer denklemleri çiftmerkezli çokgenlerde, dokuzgene kadar tayid etmiş!

* Yandaki "Euler Bağıntısı" şu zarif şekle sokulabilir:

($d = |OI|$ olmak üzere!)

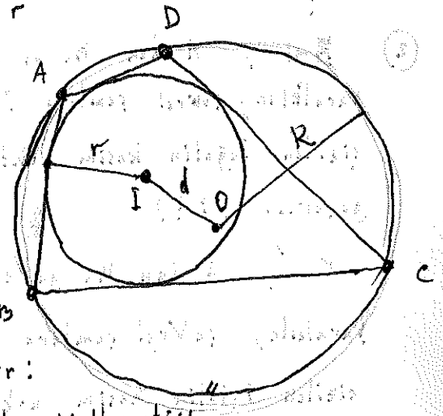
$$\frac{1}{R-d} + \frac{1}{R+d} = \frac{1}{r}$$

Euler'in arkadaşı Nicolaus Fuß (1755-1826)

bu denklemin çift merkezli dörtgenlerdeki şeklinin

$$\frac{1}{(R-d)^2} + \frac{1}{(R+d)^2} = \frac{1}{r^2}$$

olduğunu göstermiştir. (Nova Acta Petropoli XIII, 1798)

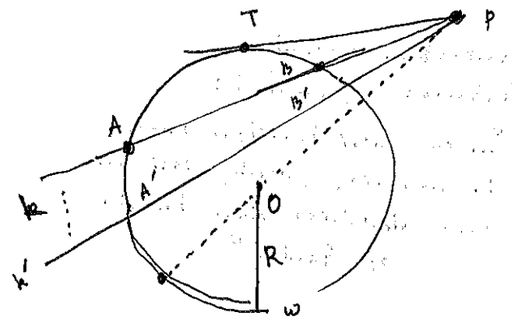


Çok zevksiz bir hesaplama şu kitapta bulunabilir:
Heinrich Dörrie: "100 Great Problems of Elementary Mathematics" p. 188-193.

Nisbeten zarif bir ispat J. C. Salazar'a aittir:

www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/Fuss.shtml

§12. Bir Noktanın bir Çembere Göre Kuvveti



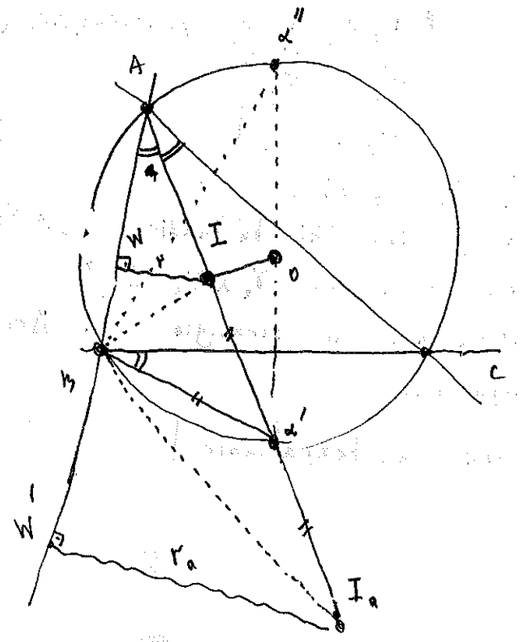
Bir P noktası ve bir ω çemberi verildiğinde, k, P den geçen ve ω çemberini A, B noktalarında kesen bir doğru olsun. Gözle; $PB \cdot PA$ miktarı k doğrusunun seçimine bağlı değildir.

P nin ω ya göre kuvveti $= PA \cdot PB = d^2 - R^2 = |PT|^2$ ($d = |PO|$, P, ω nın dışındaysa...)

(Bu miktarın işareti! >0 P içerde! dışarda! <0 / $=0$ ω nın üstünde)

§13. Euler Bağıntısı:

$$\boxed{\begin{aligned} |OI|^2 &= R^2 - 2Rr \\ |OI_a|^2 &= R^2 + 2Rr_a \end{aligned}}$$



$|OI|^2 - R^2 =$ I nin çevrel çembere göre kuvveti

$= -|I\alpha'| \cdot |IA|$ ($\triangle AW I \cong \triangle \alpha' \alpha'' B$)

$= -|\alpha' B| \cdot |IA| = -|IW| \cdot |\alpha' \alpha''|$

$= -r \cdot 2R$

K. W. Feuerbach (1800 – 1834)

J. Coolidge (1873 – 1954)

Feuerbach teoremi hakkında söyledikleri :

"... the most beautiful theorem in elementary geometry that has been discovered since the time of Euclid."

* Burada, bir noktanın bir çembere göre kuvveti mefhumuna burada kısaca yeniden bakarak, "kuvvet ekseni" ve "kuvvet merkezi" bahislerini ele alalım...

9 Nokta Çemberi'ni yeniden ziyaret :

(Pedoe !)

$c\tilde{B} \cdot cB' = \frac{1}{2}cA$ olup $\Leftrightarrow A', B', \tilde{A}, \tilde{B}$ çemberdeştir. (γ_3)

$cA \cdot cA'$

Benzer şekilde $B', C', \tilde{B}, \tilde{C}$ " (γ_1)

$C', A', \tilde{C}, \tilde{A}$ " (γ_2)

Şimdi iddia ediyoruz ki, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3$ tür.

Aksi takdirde, mesela $\gamma_1 \neq \gamma_2$ ise (ki bu takdirde $\gamma_2 \neq \gamma_3$ olduğunu da farz edebiliriz!) o zaman γ_2 & γ_3 ün kuvvet ekseni BC, γ_3 & γ_1, γ_1 & γ_2 nin de sırasıyla CA, AB dir. Bunlar bir noktada kesişmez...

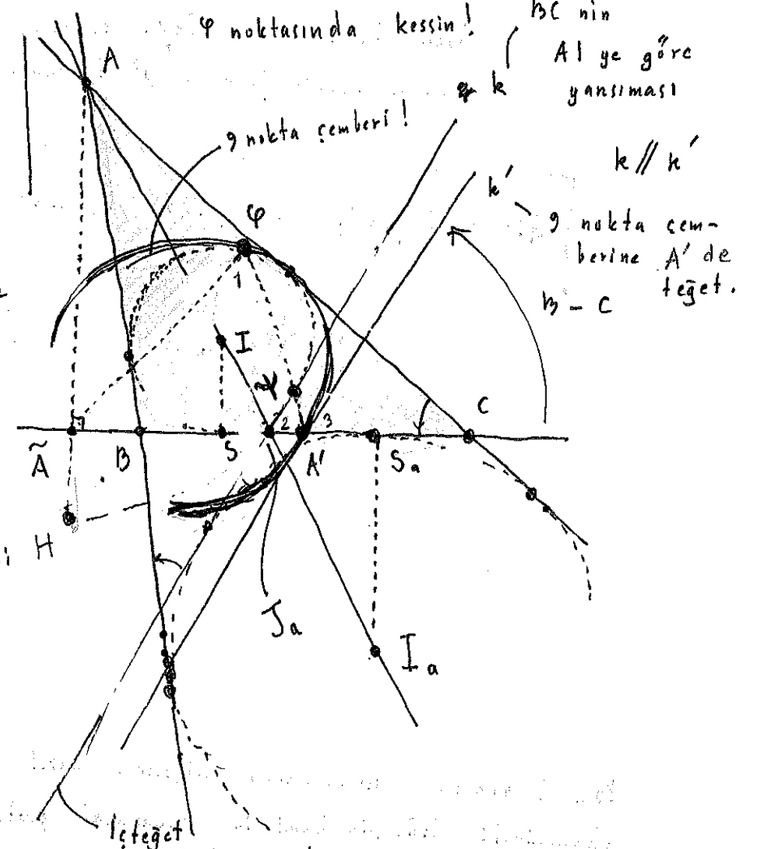
Son olarak da aynı akıl yürütme BHC de tekrarlanır!

§14. Feuerbach Teoremi :

(Bu ispat, çembere göre kuvvet mefhumunun bir tatbikatıdır!)

9 nokta çemberi iç ve dışteğet çemberlere teğettir !

$A\Psi$ içteğet çemberi φ noktasında kessin!



$\tilde{A}, J_a, S, S_a$ bir harmonik dörtlüdür!

A''nün içteğet çembere göre kuvveti

$A'\Psi \cdot A'\varphi = |A'S|^2$

$= A'J_a \cdot A'\tilde{A}$

Böylece, $\varphi, \Psi, J_a, \tilde{A}$ çemberdeş olup

$1 \equiv 2 \equiv 3$ den

φ de 9 nokta çemberi üzerinde kalır. İçteğet çember ve 9-nokta çemberi φ noktasında birbirlerine teğettir...

12.5

Menelaus , ~100 , İskenderiye

Ben Menelaus & Ceva teoremlerini Tales teoreminin genellemeleri olarak görüyorum.

Giovanni Ceva 1648/1734 Mantua

1197. Characterize the triangles of which the midpoints of the altitudes are collinear. [*Hüseyin Demir, Middle East Technical University, Ankara, Turkey.*]

Bu teoremde noktaların köşelere isabet etmemesi ve işaretlerin ehemmiyeti Hüseyin Demir'in yukardaki problemine benim verdiğim çözümle güzelce anlatılabilir. (Hüseyin Demir, "Proposal 1197" Mathematics Magazine 57 (1984) 238)

Mengen, Pazarköy

Hüseyin Demir (1916/1995)

Ankara

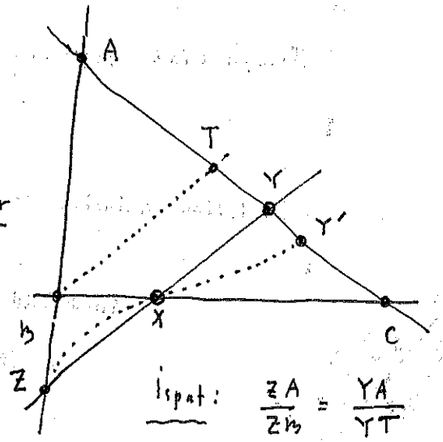
Mufassal hayat hikayesi : Cem Tezer : "Hüseyin Demir, Hayatı ve Eserleri" Matematik Dünyası 5(3) (1995) 1-9

3. Menelaus ve Ceva Teoremleri :

§15. $X \in BC - \{B, C\}$, $Y \in CA - \{C, A\}$ ve $Z \in AB - \{A, B\}$ noktalarının doğrudaş olmaları için gerek ve yeter şart

$$\frac{XB}{XC} \cdot \frac{YC}{YA} \cdot \frac{ZA}{ZB} = +1$$

olmasıdır.



İspat: $\frac{ZA}{ZB} = \frac{YA}{YT}$

$\frac{XB}{XC} = \frac{YT}{YC}$

§15'. $X \in BC - \{B, C\}$, $Y \in CA - \{C, A\}$ $Z \in AB - \{A, B\}$ olmak üzere AX, BY, CZ doğrularının noktadaş veya paralel olmaları için gerek ve yeter şart

$$\frac{XB}{XC} \cdot \frac{YC}{YA} \cdot \frac{ZA}{ZB} = -1$$

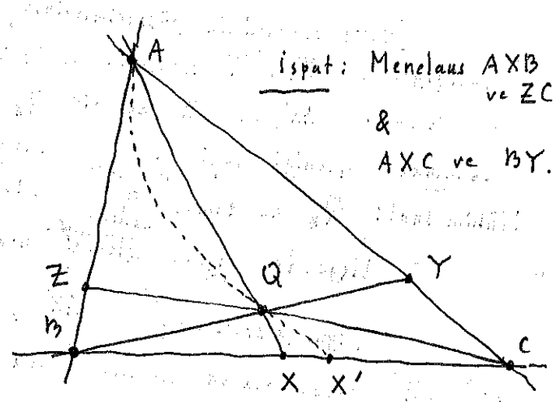
olmasıdır.

Mühim nokta :

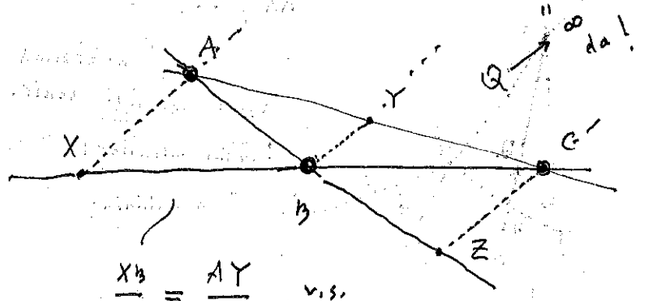
$$\frac{XB}{XC} \cdot \frac{YC}{YA} \cdot \frac{ZA}{ZB} = \frac{\cancel{c|AX|}\sin(\vec{AB}, \vec{AX})}{|AX| \cdot \cancel{a}\sin(\vec{AX}, \vec{AC})} \times \frac{\cancel{a|BY|}\sin(\vec{BC}, \vec{BY})}{|BY| \cancel{c}\sin(\vec{BY}, \vec{BA})} \times \frac{\cancel{b|CZ|}\sin(\vec{CA}, \vec{CZ})}{|CZ| \cdot \cancel{a}\sin(\vec{CZ}, \vec{CB})}$$

"Üçgenin yönünden müstakil!"

§14'



İspat: Menelaus AXB ve ZC & AXC ve BY.



$\frac{XB}{XC} = \frac{AY}{AC}$ v.s.

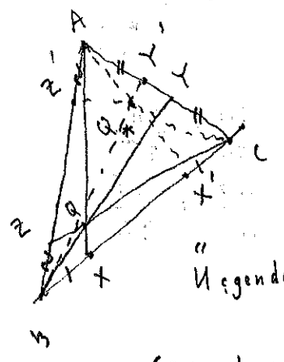
Nancy Montpellier

Joseph Diaz Gergonne 1771/1859

Christian Heinrich von Nagel 1803/1882

(Antonio Luigi Gaudenzio) Giuseppo Cremona (1830/1903)

Cremona Dönüşümleri !



"isotomically conjugate"

"Üçgende uzunlukça eşlenik noktalar : (ve doğrular) (belki "∞")

(Ceva teoreminin gösterimleriyle) AX, BY, CZ bir Q noktasında kesişiyorsa, X', Y', Z' sırasıyla X, Y, Z nin A', B', C' ne göre bakışıklarıysa o zaman AX', BY', CZ' de bir Q_* noktasında kesişir. Q_* ye Q nün uzunlukça eşleniği denir.

Az sonra!

Mühim sual: Q_* ne zaman "∞" dadır?

isogonal

"Üçgende açıca eşlenik noktalar : (ve doğrular !)

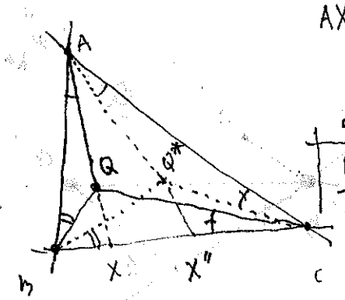
kullanıldığını hiç görmedim...

(Aynı gösterimle!) AX'', AX in A1 deki yansıması olsun.

BY'', CZ'' benzer olarak alınsın. (Ceva teoreminin açılarla yazılmasından!)

AX'', BY'', CZ'' bir Q^* noktasında kesişir.

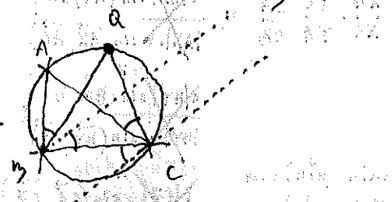
Q^* noktasına Q nün açıca eşleniği denir.



Mühim misaller: O ve H

Ω ve Ω'

I kendisinin!

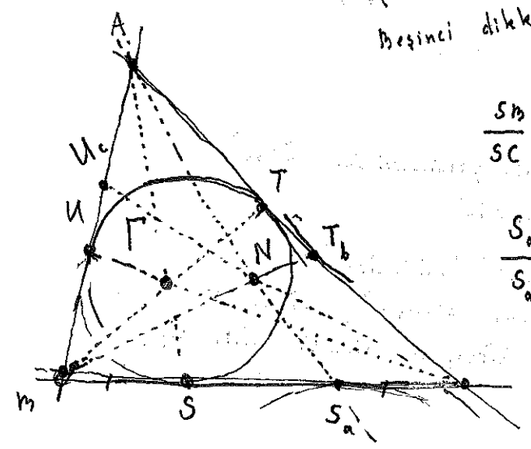


Mühim sual: Q^* ne zaman "∞" dadır?

Cevap: Ancak ve yalnız Q çevrel çember üzerindeyse!

§16 Gergonne ve Nagel Noktaları :

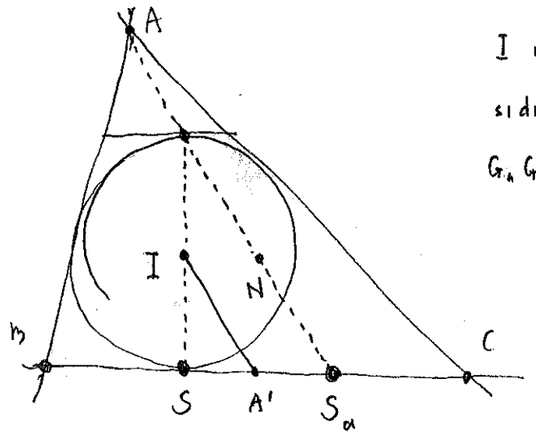
Beşinci dikkate



$$\frac{SB}{SC} = -\frac{s-b}{s-c} \quad \text{ve sair}$$

$$\frac{S_aB}{S_aC} = -\frac{s-c}{s-b} \quad \text{v.s.}$$

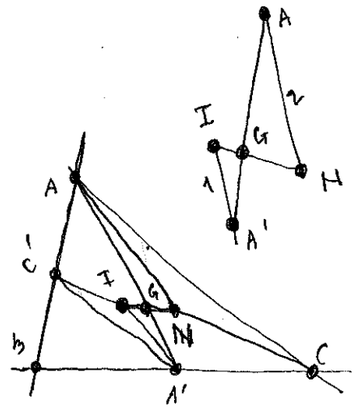
Gergonne noktası Γ ve Nagel noktası N birbirlerinin uzunlukça eşleniğidir. G noktası kendisinin uzunlukça eşleniğidir.



Dikkat : $A'I \parallel AN$ v.s.

Benzer şekilde $G_aN \parallel$

I noktası A'B'C' nün Nagel noktasıdır, benzer şekilde N noktası da $G_aG_bG_c$ nin içteğet çember merkezidir.



Böylece I, G, N doğrudaş olup

GI : GN = −1 : 2 dir!

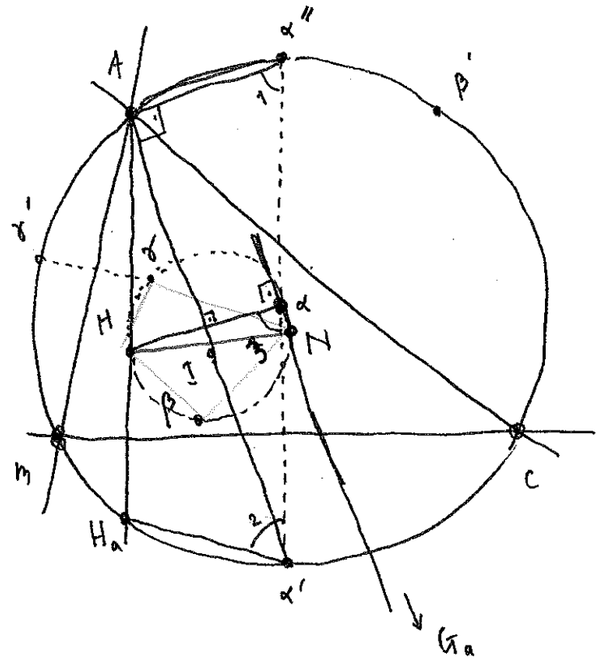
Wilhelm Fuhrmann 1833/1904

Johnson'ın zikrettiği bir kitabı var :

W. Fuhrmann : "Synthetische Beweise planimetrischer Sätze"
1890, Berlin

(Nadir nüsha. Harvard University Library'de bir nüsha varmış. Bu nüsha da Emmerich'in kitabıyla birlikte ciltliymiş!)

§17. Fuhrmann Çemberi



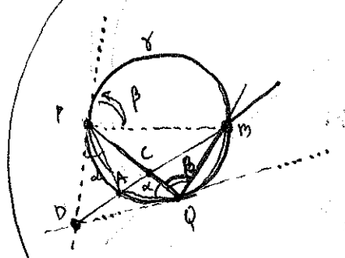
ABC üçgeninde, AI, BI, CI içaçıortayları çevrel çemberi sırasıyla $\alpha' \neq A$, $\beta' \neq B$, $\gamma' \neq C$ noktalarında kesersa, α, β, γ da α', β', γ' nün sırasıyla BC, CA, AB deki yansımaları olursa, o zaman, α, β, γ noktaları [HN] çaplı çember üzerinde kalır.

Bu [HN] çaplı çembere "Fuhrmann Çemberi" denir.

$\alpha\beta\gamma$: "Das Spiegeldreieck"

Émile (Michel Hyacinthe) Lemoine (1840/1912)

Tatbikat: Bir γ çemberine dışındaki D noktasından çizilen teğetlerin temas noktaları P & Q, D den geçen her bir doğrunun γ yı kestiği noktalar A, B ve PQ doğrusunu kestiği nokta da C ise, o zaman $A, B; C, D$ bir harmonik dörtlü dür.

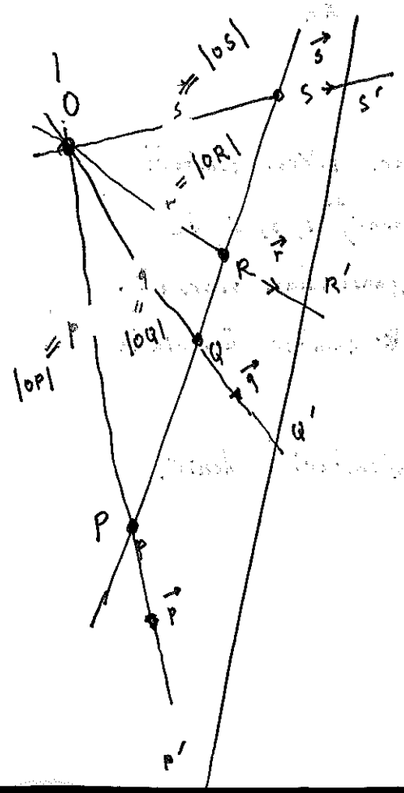


Yandaki açıları takip ederek $(A,B;C,D) = \pm 1$.

C içerde, D dışarda olduğundan ...

Çifte oranın açılarla belirlenmesi

ve - elbette - "merkezi izdüşümler" tarafından korunması !



$$(P,Q;R,S) = \frac{RP}{RQ} : \frac{SP}{SQ}$$

$$= \frac{|R|\sin(\measuredangle(\vec{r},\vec{p}))}{|r||\sin(\measuredangle(\vec{r},\vec{q}))} : \frac{|R|\sin(\measuredangle(\vec{s},\vec{p}))}{|s||\sin(\measuredangle(\vec{s},\vec{q}))} =$$

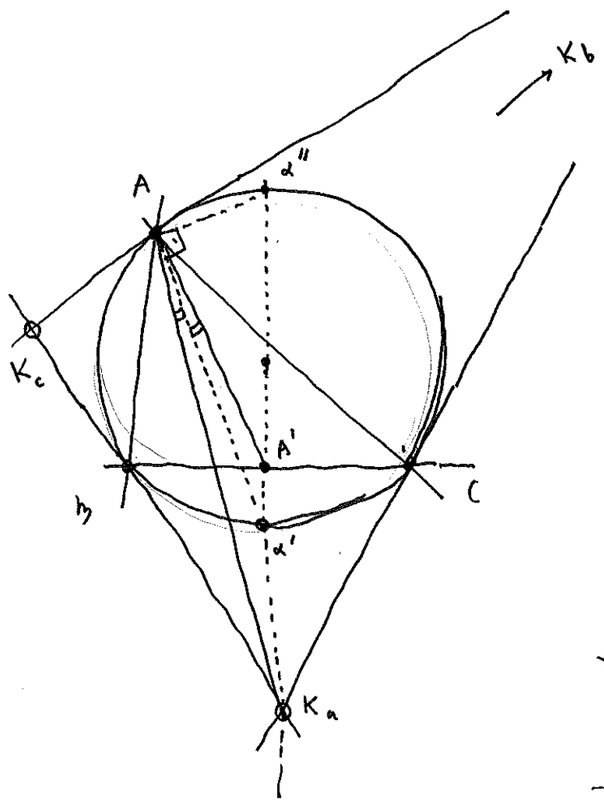
(Dikkat ! bu miktar doğruların üzerinde seçilen yönlerden müstakildir... Sadece doğrulara bağlıdır...)

$$= (P',Q';R',S')$$

§18 Lemoine Noktası : ("Symmedian Point")

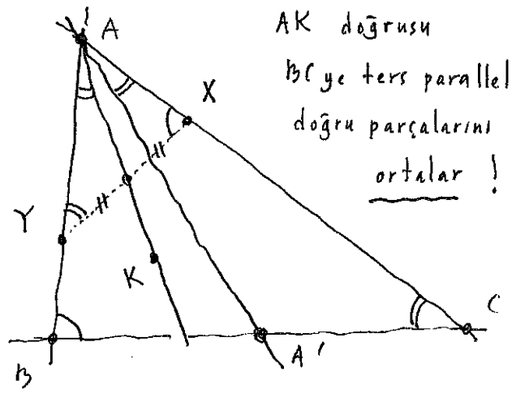
A, B, C köşelerinden çevrel çembere sırasıyla k, l, m teğetleri çizilsin, l ve m, m ve k, k ve l sırasıyla K_a, K_b, K_c noktalarında kesişsin. ($K_aK_bK_c$ üçgenine "Ters Değme Üçgeni" diyebiliriz.)

AK_a, BK_b, CK_c doğruları G nin açıca eşleniği olan noktada kesişir. Bu noktaya Lemoine Noktası denir.



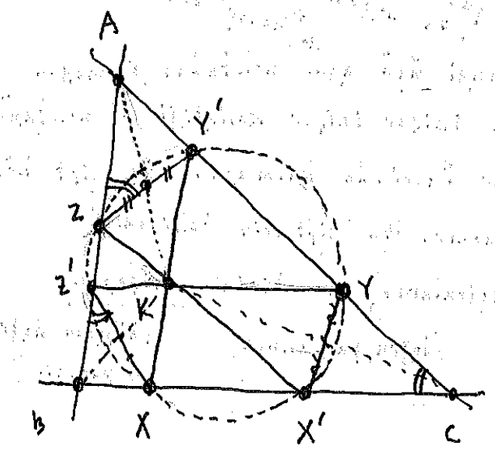
İspat: $K, A'; \alpha', \alpha''$ bir harmonik dörtlü teşkil ettiği ve $A\alpha' \perp A\alpha''$ bulunduğundan $A\alpha' = Al$ $K_a A A'$ nün içaçıortayıdır, AA' nün kenarortay olduğunu hatırlayalım.

" Ters paralel doğru " : X, Y, B, C nin çemberdeş olması hali !



AK doğrusu BC ye ters parallel doğru parçalarını ortalar !

§19. Lemoine Çemberleri :

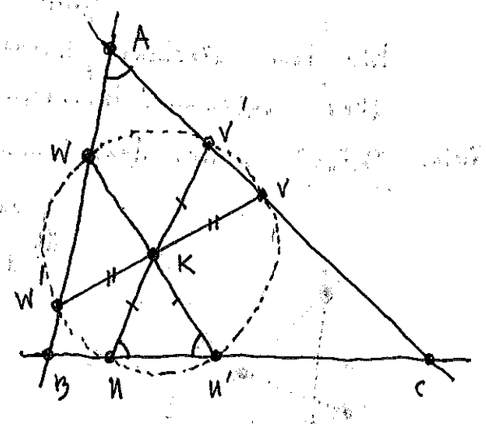


Birinci Lemoine Çemberi

Lemoine noktasından kenarlara paralel çizilen doğru parçalarının uçları bir çember üzerinde kalır.

Dikkat : ZKY'A bir paralel_kenar olup, AK doğrusu [ZY'] doğru parçasını ortalar. Böylece ZY' BC ye göre ters paraleldir.

Dikkat : XX'YZ' (ve diğerleri benzer şekilde) bir ikizkenar yamuktur!



İkinci Lemoine Çemberi

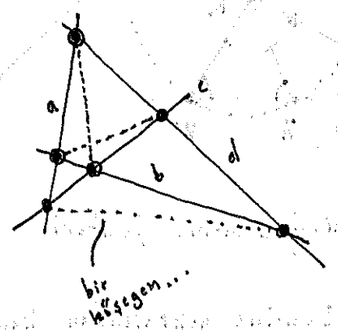
Lemoine noktasından kenarlara çizilen ters paralellerin uç noktaları bir çember üzerinde kalır.

Dikkat : K noktası [U,V'] doğru parçasının orta noktasıdır. KUU' (ve benzerleri) ikizkenardır.

Isaac Newton, 1643/1727

Bir tam dörtkenar ("complete quadrilateral") herhangi üçü aynı noktadan geçmeyen dört doğrudur. Bunların ikişer ikişer kesiştiği 6 noktaya ("köşe") denir. Aynı kenar üzerinde kalmayan üç çift köşe vardır. Bu çiftlerin belirlediği üç doğrunun (doğru parçasının) her birine köşegen (köşegen doğru parçası) denir

Bu doğruların her birine "kenar" denir.

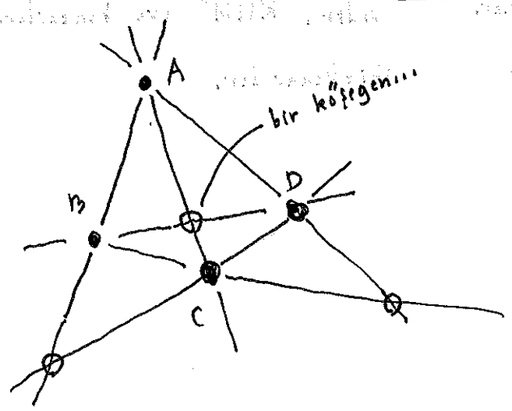


çevrik ~ "dual"
çevriklik ~ "dualité"

Ara: Bu noktada "dualité" mefhumundan biraz bahsedelim.

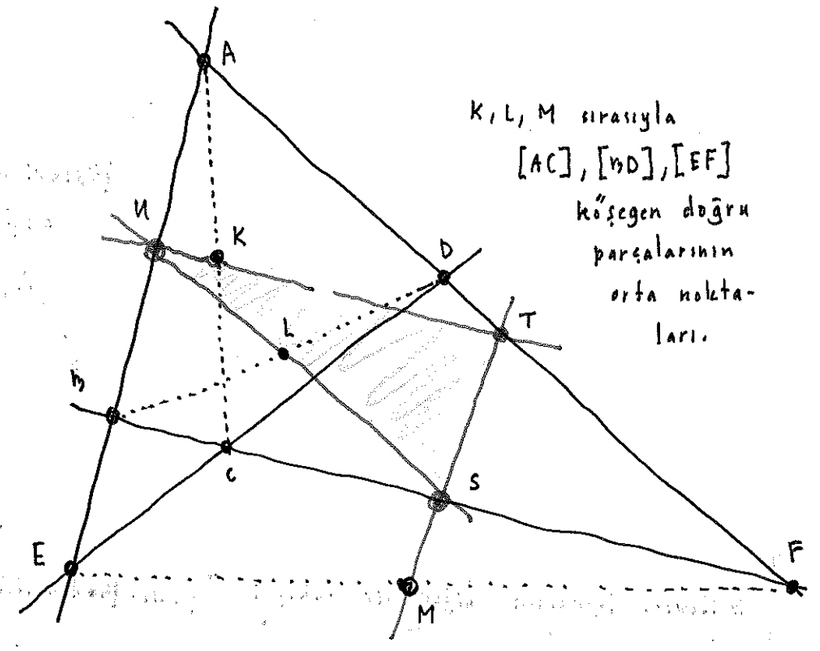
İyi misal: Tam dörtkenar mefhumunun "dual"i

tam dörtköşe ("complete quadrangle"): Herhangi üçü aynı doğru üzerinde kalmayan dört noktadır....



§20. Newton Doğrusu:

Bir tam dörtkenarda, köşegenlerin orta noktaları doğrudaştır. Bu doğruya tam dörtkenarın Newton doğrusu denir.



K, L, M sırasıyla [AC], [BD], [EF] köşegen doğru parçalarının orta noktaları.

S, T, U sırasıyla [BF], [FA], [AB] doğru parçalarının orta noktaları olsun.

$$\frac{KT}{KU}\cdot\frac{LU}{LS}\cdot\frac{MS}{MT}=\frac{CB}{CF}\cdot\frac{DF}{DA}\cdot\frac{EA}{EB}=+1$$

(ABF üçgeni ve CD doğrusundan Menelaus.)

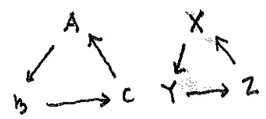
Şimdi de STU üçgeninde Menelaus kullan...

§20'. Genişletmeler: Beş doğru ⟶ Newton noktası...

§20". "Affine Geometry" hakkında bir kaç söz?

Gérard Desargues (1591/1661)

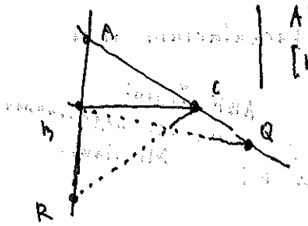
Gösterimin alıkatle "çemberlik" seçilmesinin faydası :



?

kim bu adam?

* Newton doğrusuna diğer bir bakış : "Gauss-Bodenmiller Teoremi"



ABC üçgeninde $Q \in AC$ ve $R \in AB$ olsun.
[BQ] ve [CR] çaplı çemberlerin kuvvet ekseni H den geçer.

Bu basit yardımcı teoremden faydalanılarak :

[AC], [BD], [EF] çaplı çemberlerin ortak bir kuvvet ekseni vardır. Böylece

1) K, L, M doğrudaştır
2) ABF, AED, BEC, DCF üçgenlerinin diklik merkezleri doğrudaştır.

(Tabii, bu doğru K, L, M noktalarını bulunduran doğrunun diktir...)

§21. Eksik Desargues Teoremi :

İspat: AA', BB', CC' eğer Ω da kesişiyorlarsa

ΩBC & $B'C'$ & Menelaus $\longrightarrow$

$$\frac{XB}{XC}\cdot\frac{C'C}{C'\Omega}\cdot\frac{B'\Omega}{B'B}=+1$$

Benzer şekilde

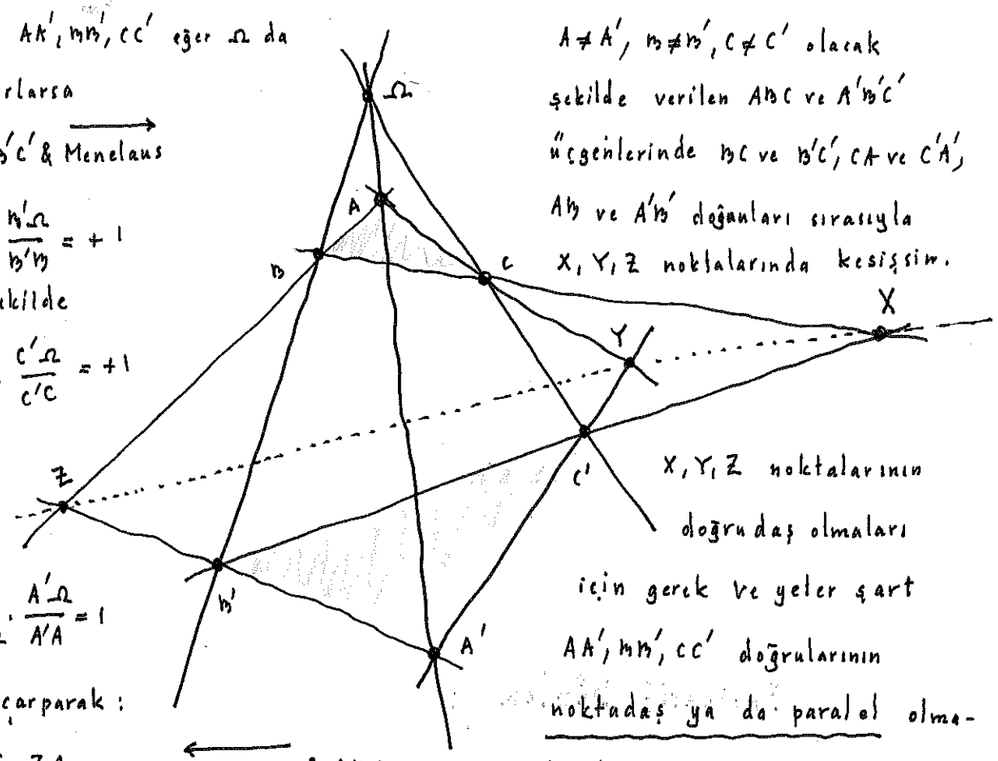
$$\frac{YC}{YA}\cdot\frac{A'A}{A'\Omega}\cdot\frac{C'\Omega}{C'C}=+1$$

$$\frac{ZA}{ZB}\cdot\frac{B'B}{B'\Omega}\cdot\frac{A'\Omega}{A'A}=1$$

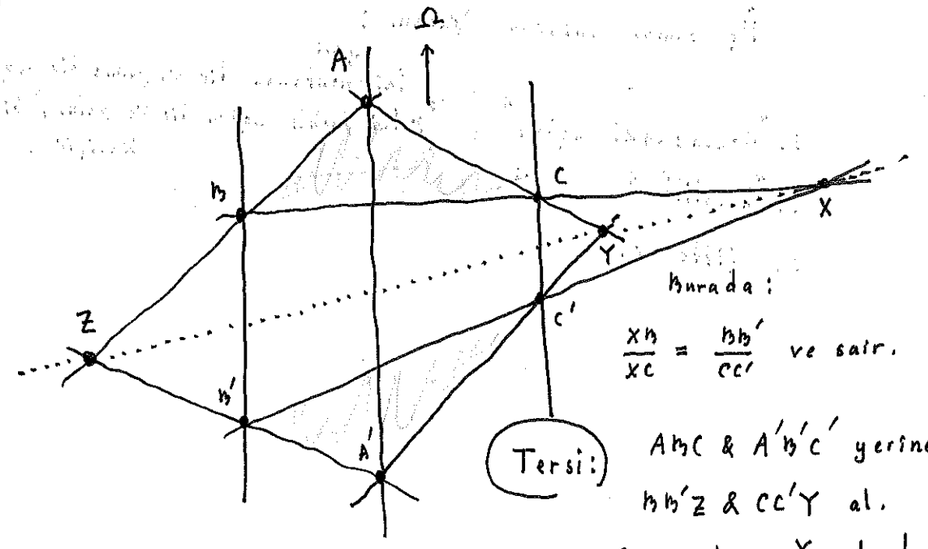
Hepsini çarparak :

$$\frac{XB}{XC}\cdot\frac{YC}{YA}\cdot\frac{ZA}{ZB}=+1.$$ $\longleftarrow$ Menelaus & ABC.

$A \neq A'$, $B \neq B'$, $C \neq C'$ olacak şekilde verilen ABC ve $A'B'C'$ üçgenlerinde BC ve $B'C'$, CA ve $C'A'$, AB ve $A'B'$ doğruları sırasıyla X, Y, Z noktalarında kesişsin.



X, Y, Z noktalarının doğrudaş olmaları için gerek ve yeter şart AA', BB', CC' doğrularının noktadaş ya da paralel olmalarıdır.



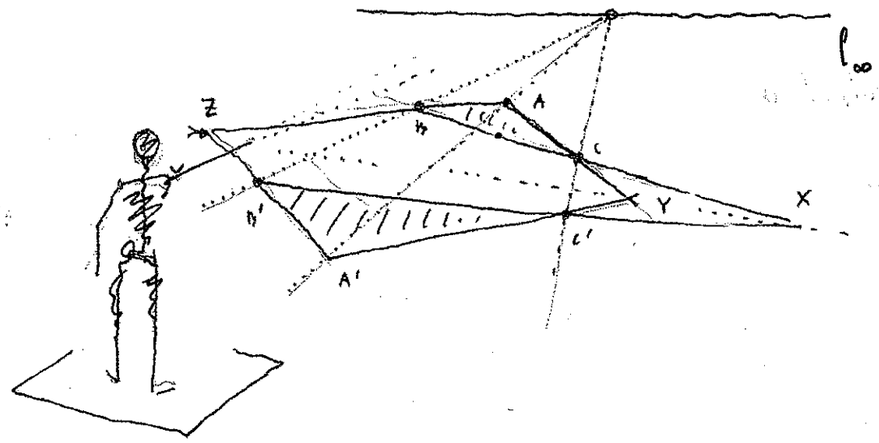
Burada :

$$\frac{XB}{XC}=\frac{BB'}{CC'}$$ ve sair.

Tersi: ABC & $A'B'C'$ yerine $BB'Z$ & $CC'Y$ al.
Ω yerine X al !

"Sonsuzdaki doğru"

Ufuk...



Projektif Düzlem :

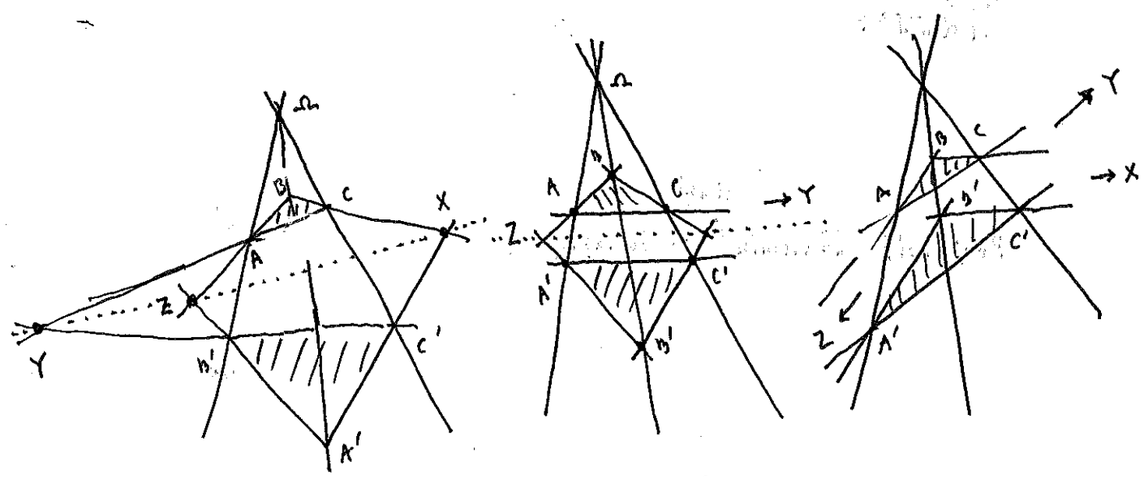
Üç temel unsurun Vatanı :

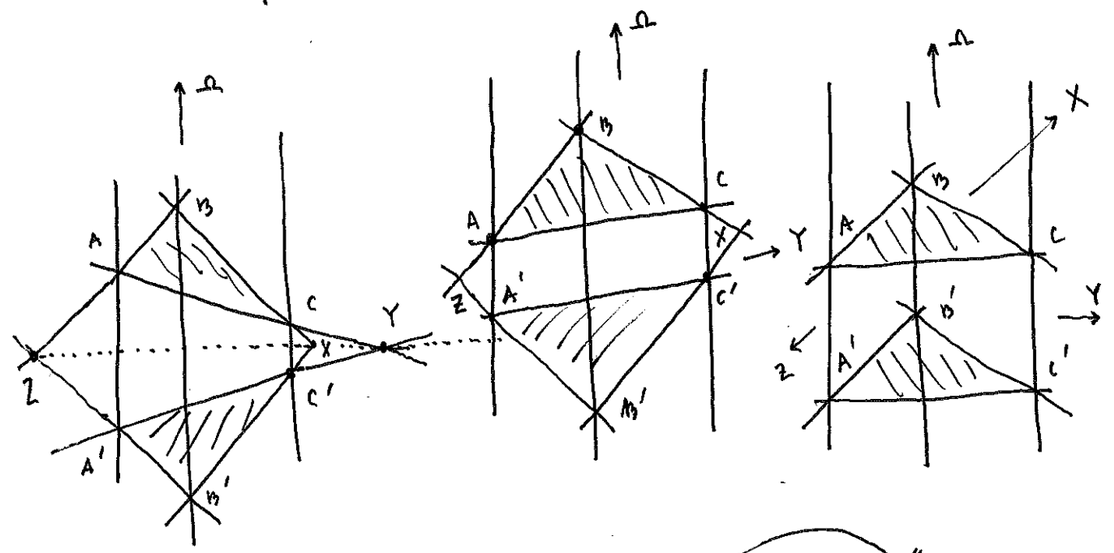
1. "Sonsuzdaki doğru"
2. "Dualité"
3. Çifte oran

iki farklı noktadan bir ve yalnız bir doğru geçer
iki farklı doğru bir ve yalnız bir noktada kesişir

§22. Neden "eksik" ?

Ve : Nasıl tekmil edilecek ?





İki üçgenin köşelerinden bakarlı olması için gerek ve yeter şart, kenarlarından bakarlı olmasıdır

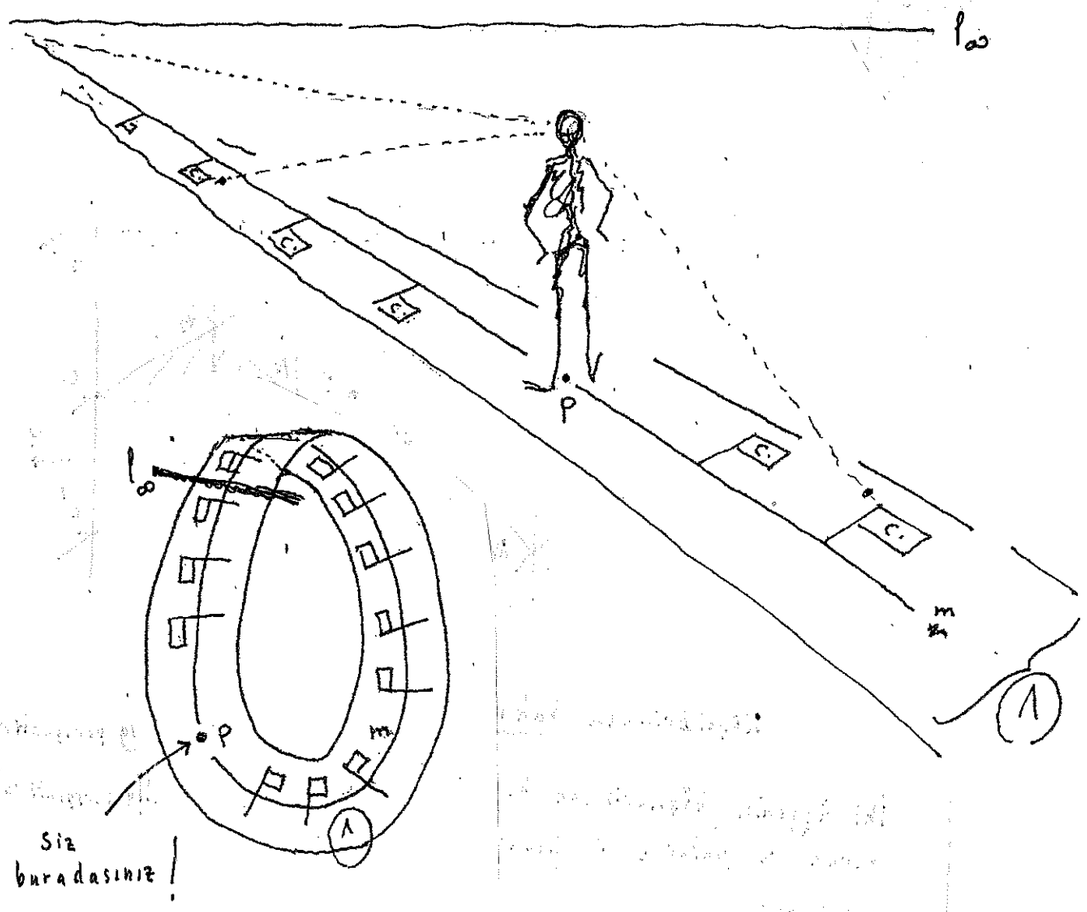
"centrally perspective"

"axially perspective"

Pappos , (~290/~350) İskenderiye

Πάππος

Projektif düzlemin ciddi bir tuhaflığı !

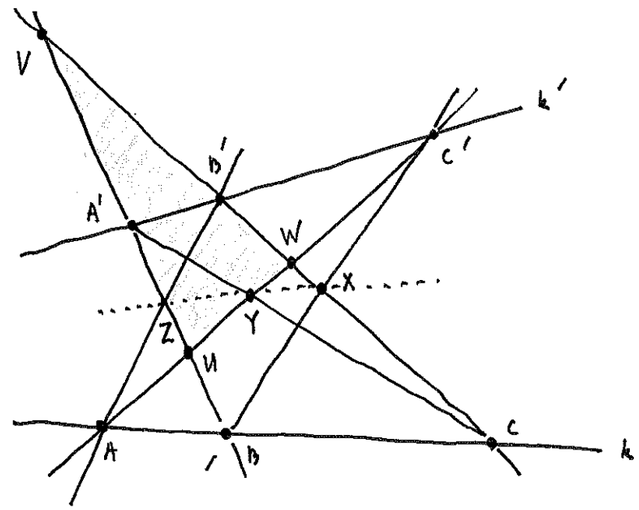


§29. Pappos Teoremi

Birbirlerinden farklı k, k' doğruları, $A \neq B', C'$ & $B \neq C', A'$ & $C \neq A', B'$ olacak şekilde $A, B, C \in k$ ve $A', B', C' \in k'$ noktaları verilmiş olsun ve BC' & $B'C$, CA' & $C'A$, AB' & $A'B$ doğruları sırasıyla X, Y, Z noktalarında kesişsin. X, Y, Z noktaları doğrudaştır.

İhtar:

Projektif düzlemde bu teoremin ifadesi ne kadar basittir !



İspat:

UVW & BC', Menelaus : $\frac{XV}{XW} \cdot \frac{C'W}{C'U} \cdot \frac{BU}{BV} = +1$

CA' : $\frac{YW}{YU} \cdot \frac{A'U}{A'V} \cdot \frac{CV}{CW} = +1$

AB' : $\frac{ZU}{ZV} \cdot \frac{B'V}{B'W} \cdot \frac{AW}{AU} = +1$

k : $\frac{AU}{AW} \cdot \frac{CW}{CV} \cdot \frac{BV}{BU} = +1$

k' : $\frac{A'V}{A'W} \cdot \frac{C'U}{C'W} \cdot \frac{B'W}{B'U} = +1$

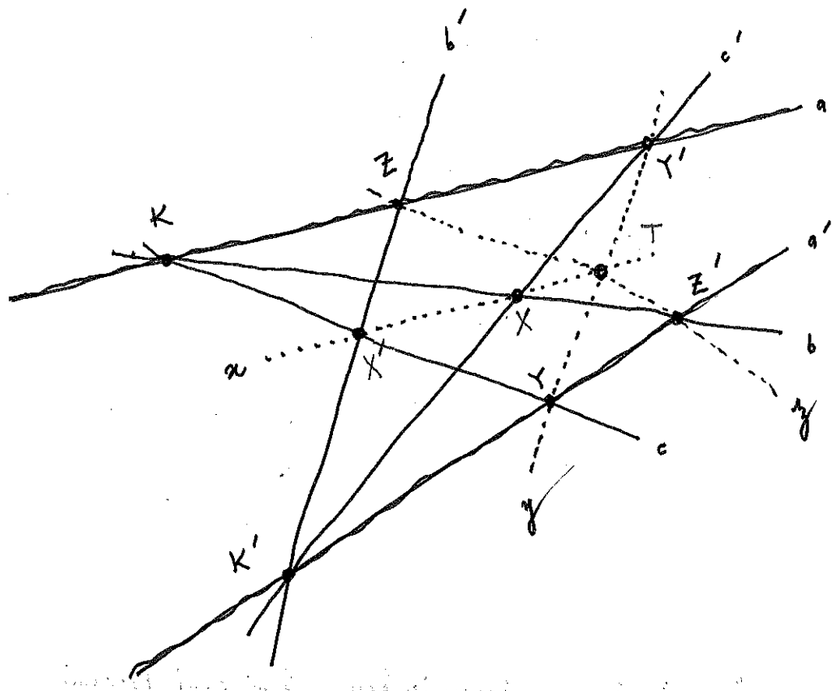
$\Longrightarrow \frac{XV}{XW} \cdot \frac{YW}{YU} \cdot \frac{ZU}{ZV} = +1$

$\Longleftarrow$ Menelaus

"Dualité" de yerleşik ve faydalı gösterim...

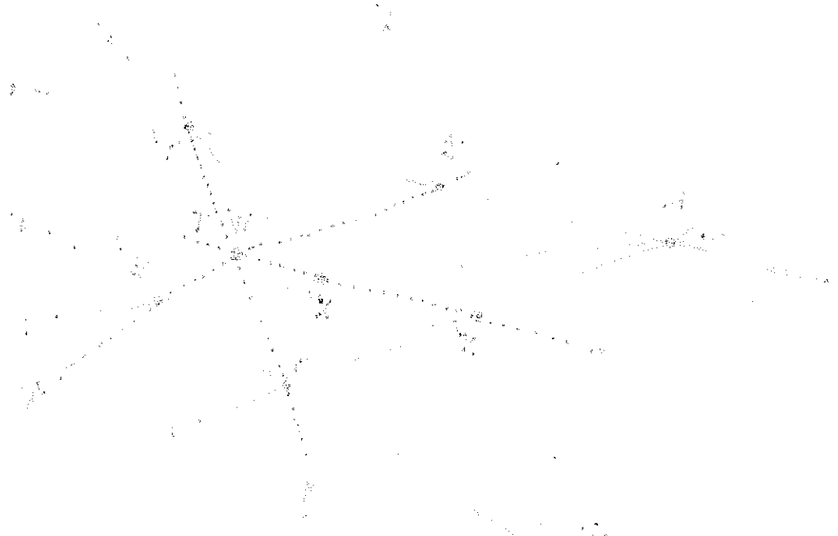
Noktalar	Doğrular
A, m, C...	a, b, c...

§24. Pappos Teoreminin "Dual"i



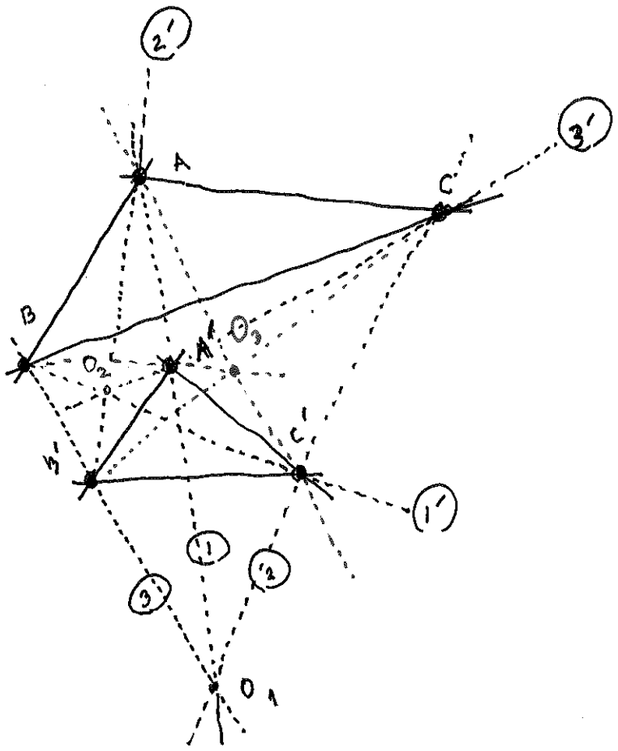
Birbirlerinden farklı K, K' noktaları, K den geçen a, b, c ve K' den geçen a', b', c' doğruları alınsın. b ve c', X; b' ve c, X'; c ve a' Y; c' ve a, Y', a ve b', Z, a' ve b, Z' noktalarında kesişirse, $x = XX'$, $y = YY'$, $z = ZZ'$ doğruları ya noktadaş, ya da paraleldir.

İspat: a, a' doğruları üzerindeki K, Z, Y sırasıyla ve K', Y, Z' noktalarına Pappos teoremi tatbik edilirse, X', X ve y ile z nin kesişme noktası olan T nin doğrudaş olduğu anlaşılır.



İhtar: "Dual" Pappos teoreminden §25 teki teoremi çıkarttık; Bu teoremden de "dual" Pappos teoremini çıkartabiliriz: §24 teki şekilde, XYZ üçgeni Y'Z'X' üçgenine (K' noktasından) ve Z'X'Y' üçgenine (K noktasından) bakarlı olup, X'Y'Z' üçgenine de bakarlıdır. Yani XX', YY', ZZ' noktadaştır!

§25. "Dual" Pappos Teoremine Eşdeğer Zarif Bir Teorem

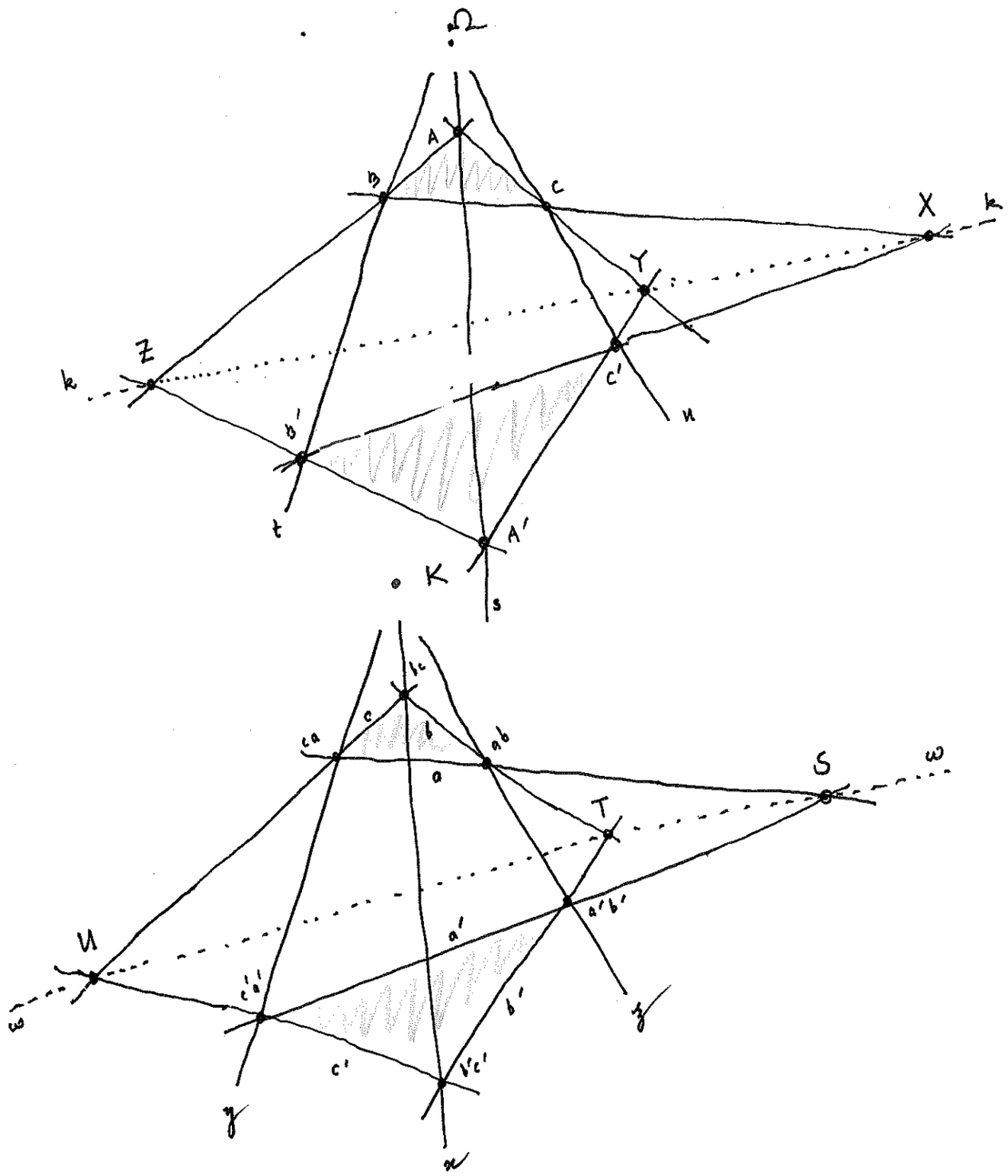


ABC üçgeni A'B'C' üçgenine ve B'C'A' üçgenine köşelerden bakarlıysa, o zaman ABC üçgeni C'A'B' üçgenine de köşelerden bakarlıdır.

İspat: "Dual" Pappos teoremi: $\begin{cases} O_1 \text{ den geçen} & 1, 2, 3 \\ O_2 \text{ den geçen} & 1'2'3' \end{cases}$

Şunu görmek yeter: $\left.\begin{aligned} AC' &= 12', 1'2 \\ CB' &= 23', 2'3 \\ BA' &= 31', 3'1 \end{aligned}\right\}$!

§26. Desargues Teoremi Kendi "Dual"idir !



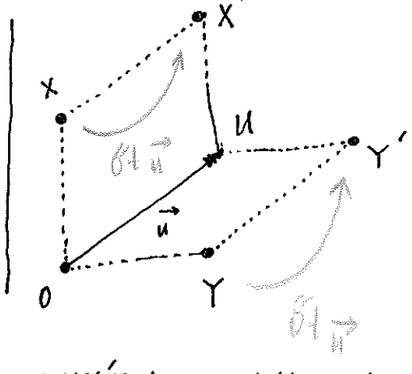
C. Öklid Geometrisine Has Dönüşümler :

§27. Öteleme : Bir $\vec{u}$ vektörü boyunca öteleme (Öklid Düzlemini $\mathbb{D}$ ile göster! — üzerinde bir yön seçilmiş bir doğru parçası!)

$\ddot{O}t_{\vec{u}} : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ şeklinde bir fonksiyon olup her bir $X \in \mathbb{D}$ için

$$\| X' = \ddot{O}t_{\vec{u}}(X) = X + \vec{u} \|$$

şeklinde tarif edilir.



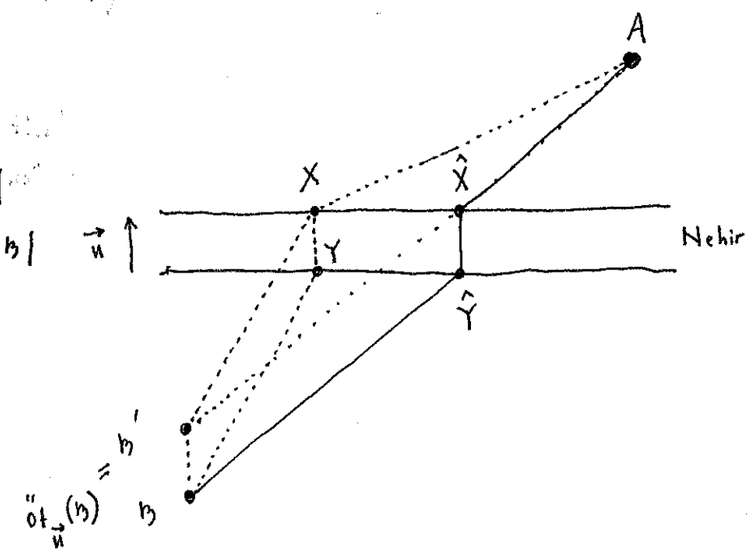
0UX'X bir paralelkenardır.

Tabii ki : $\left(\ddot{O}t_{\vec{u}}\right)^{-1} = \ddot{O}t_{-\vec{u}}$

$\ddot{O}t_{\vec{u}} \circ \ddot{O}t_{\vec{v}} = \ddot{O}t_{\vec{u}+\vec{v}}$

§27'. Misal : Köprünün yeri nasıl seçilmeli?

$$\begin{aligned} & |A\hat{X}| + |\hat{X}\hat{Y}| + |\hat{Y}B| \\ = \; & |A\hat{X}| + |\hat{X}B'| + |\hat{X}\hat{Y}| \\ = \; & |AB'| + |\hat{X}\hat{Y}| \\ \leq \; & |AX| + |XB'| + |XY| \\ = \; & |AX| + |XY| + |YB| \end{aligned}$$



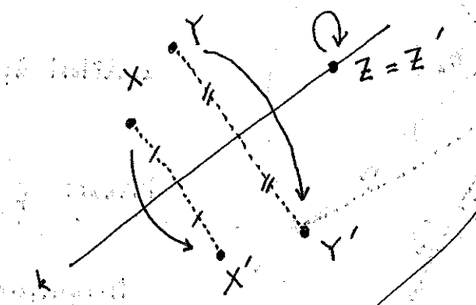
Pierre de Fermat : (1601-1665)

Aslında, optikte "Fermat Prensipi" basit bir "en kısa yol" şartı değildir. Daha ziyade bir "en kısa zaman" şartıdır. Teferruata girmeyelim...

§28. Yansıma: Bir k doğrusundan yansıma

$$Yan_k : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$$

şeklinde bir fonksiyon olup, herhangi bir $X \in \mathbb{D}$ için $X' = Yan_k(X)$, k doğrusu $[X,X']$ doğru parçasının ortadikmesi olacak şekilde seçilen yegane noktadır.



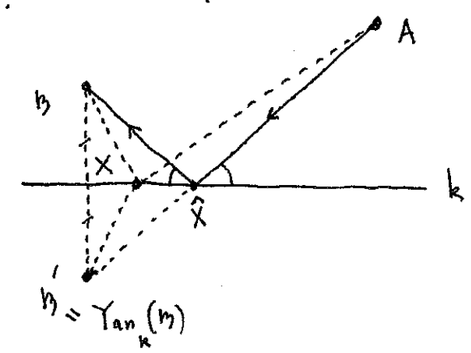
Dikkat:

$X' = Yan_k(X)$ ise, o zaman $X = Yan_k(X')$ olur!

Dikkat:

(1) $Yan_k \circ Yan_k = I_{\mathbb{D}}$ her noktayı olduğu yerde bırakan dönüşüm...

(2) $Z \in k$ olması için gerek ve yeter şart $Yan_k(Z) = Z$ olmasıdır!

§28'. Misal: Bir noktadan diğerine bir aynadan yansıyarak giden ışık en kısa yolu takip eder... "Fermat Prensipi"

$$\begin{aligned} &|A\hat{X}| + |\hat{X}B| \\ &= |A\hat{X}| + |\hat{X}B'| = |AB'| \\ &\leq |AX| + |XB'| \\ &= |AX| + |XB| \end{aligned}$$