p-SEL SAYILAR

21-25 Ağustos 2017
Çakılarası Matematik Köyü
Eskişehir

K. İlhan İkeda, Serdar Nair ve Ergin Süer

Çakılarası Matematik Köyü Yayınları No. 1

İçindekiler

Önsöz

Bu notlar 21-25 Ağustos 2017 tarihleri arasında *Çakılarası Matematik Köyü'nde* tertiplenmiş olan *"p-sel Sayılar"* adlı etkinlikte işlemiş olduğum, amacı p-sel sayıların ne olduğunu ve neden önemli bir sayı sistemi olduğunu kısaca özetlemek olan toplam 20 saatlik derslerin gözden geçirilmiş halini oluşturmaktadır. Bu notların hazırlanmasında emeği geçen, dikkatle ve titizlikle ders notlarını tutan İstanbul Bilgi Üniversitesi Matematik Bölümü Yüksek Lisans öğrencisi Ergin Süer'e ve bu notları çok kısa sürede mükemmel bir şekilde AMS-LaTeX ile kitap haline dönüştüren Yeditepe Üniversitesi Matematik Bölümü Araştırma Görevlisi Serdar Nair'e teşekkürlerimi sunarım.

Doğanın güzel bir parçası olan Çakılarası Matematik Köyü'nde derslerime katılan ve dikkatle dersleri takip eden tüm öğrencilere teşekkürlerimi sunarım.

K. İlhan İkeda

Yeditepe Üniversitesi

Matematik Bölümü

İstanbul

Bölüm 1

Mutlak Değerler

K bir cisim olsun.

Tanım 1.1. K üzerine bir **mutlak değer (norm)** $|\cdot|$,

- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0, \quad \forall x \in K,$
- $|x + y| \leq |x| + |y|, \quad \forall x, y \in K$, ve
- $|xy| = |x| \cdot |y|, \quad \forall x, y \in K$

koşullarını sağlayan bir $|\cdot| : K \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ fonksiyonudur. Bu şekilde türetilen $(K, |\cdot|)$ ikilisine de **mutlak değerli cisim (normlu cisim)** denir.

1.1 Temel Örnekler

Örnek. $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$, $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ve $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ mutlak değerli cisimlere örnektir.

Tanım 1.2 (Aşikar Mutlak Değer).

$$|x| = \begin{cases} 1, & x \neq 0_K \\ 0, & x = 0_K \end{cases}$$

şeklinde K üzerine tanımlı mutlak değere, **aşikar mutlak değer** denir.

1.2 p-sel Mutlak Değer

$x \in \mathbb{Q}$ ve $x = \frac{a}{b}$ en sade kesirsel ifade olsun. Yani $a, b \in \mathbb{Z}, \quad b \neq 0$ ve $\operatorname{obeb}(a, b) = 1$ olsun. Bu durumda sabitlediğimiz bir p asal sayısı için

$$x = \frac{a}{b} = p^{\operatorname{ord}_p(a)} \cdot \frac{a'}{b'}$$

eşitlikleri mevcuttur, öyle ki $a', b' \in \mathbb{Z}, \quad b' \neq 0, \quad \operatorname{obeb}(a', b') = 1$ ve $p \nmid a'$. Şimdi

$$|\cdot|_p : K \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

fonksiyonunu şu şekilde tanımlayalım:

$$|x|_p = \left(\frac{1}{p}\right)^{\operatorname{ord}_p(x)}, \qquad \forall x \in \mathbb{Q} - \{0\}, \quad \text{ve} \quad |0|_p = 0.$$

Bu durumda,

$$|\cdot|_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

fonksiyonu $\mathbb{Q}$ üzerine bir mutlak değerdir, ve bu fonksiyona $\mathbb{Q}$ üzerine p-**sel mutlak değer** denir. Dahası tanımını $\operatorname{ord}_p(0) := \infty$ ile genişlettiğimiz ord_p fonksiyonuna da $\mathbb{Q}$ üzerine p-**sel değerlendirme** denir.

Ödev. Değerlendirmeler hangi şartları sağlar?

Not. $\mathbb{Q}$ üzerine p-sel mutlak değer ilk olarak Kurt Hansel tarafından ortaya atılmıştır. Sonra, öğrencisi Helmut Hasse sayılar kuramına pek çok şekilde uygulanmıştır.

Tanım 1.3. K cismi üzerine tanımlı $|\cdot|_1$ ve $|\cdot|_2$ mutlak değerlerine **denktir** denir eğer

$$|x|_1^{\alpha} = |x|_2, \qquad \forall x \in K$$

koşulunu sağlayan bir $0 < \alpha \in \mathbb{R}$ varsa.

Teorem 1.1 (Ostrowski). *$\mathbb{Q}$ üzerine tanımlı aşikar olmayan $|\cdot|$ mutlak değeri ya arşimetsel mutlak değere denktir ya da tek bir p asal sayısı için bir p-sel mutlak değere denktir ve ikisi aynı anda olamaz.*

Kanıt. $a, b \in \mathbb{Z}_{>1}$ olsun.

- b^n sayısını ($n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$), a tabanına göre yazalım. $c_0, c_1, \ldots, c_m \in \{0, 1, \ldots, a-1\}$ ve $c_m \neq 0$ olmak üzere:

$$b^n = c_m a^m + c_{m-1} a^{m-1} + \cdots + c_1 a + c_0. \tag{1.2.1}$$

- $M = \sup\{|1|, \ldots, |a-1|\}$ olsun. O halde,

$$\begin{aligned} |b^n| &= \left|c_m a^m + c_{m-1} a^{m-1} + \cdots + c_1 a + c_0\right| \\ &\leq |c_m| \cdot |a|^m + |c_{m-1}| \cdot |a|^{m-1} + \cdots + |c_1| \cdot |a| + |c_0| \\ &\leq M (m+1) \max\left(|a|^m, \ldots, |a|, |1|\right). \end{aligned}$$

Eşitlik 1.2.1 $\Rightarrow$ $a^m \leq b^n$ $\Rightarrow$ $m \leq n \cdot \log_a(b)$.

$$\max(1, |a|, \ldots, |a|^m) = \begin{cases} |a|^m, & |a| \geq 1, \\ 1, & |a| < 1. \end{cases}$$

Bu nedenle, $\max(1, |a|, \ldots, |a|^m) \leq \sup\left(1, |a|^{n \cdot \log_a(b)}\right)$. Dolayısıyla,

$$|b|^n \leq M (m+1) \max\left(|a|^m, \ldots, |a|, |1|\right)$$

ve

$$|b| \leq \left(M (m+1)\right)^{\frac{1}{n}} \sup\left(1, |a|^{\log_a(b)}\right).$$

$n \to \infty$ durumunda:

$$|b| \leq \sup\left(1, |a|^{\log_a(b)}\right).$$

Durum **(1).** $\exists b \in \mathbb{Z}, \quad |b| \gneq 1$. Yani,

$$1 \lneq |b| \leq \sup\left(1, |a|^{\log_a(b)}\right).$$

Dolayısıyla, $|a|^{\log_a(b)} > 1$ ve $\log_a(b) > 0$ $\Rightarrow$ $|a| > 1$.

$$a^m \leq b^n \;\Rightarrow\; m \leq n \log_a(b) \;\Rightarrow\; \frac{m}{n} \leq \log_a(b).$$

a ile b'nin rollerini değiştirerek aynı hesaplamalar yapıldığında

$$|a| \leq |b|^{\log_b(a)}$$

eşitsizliği elde edilir. $a, b \in \mathbb{Z}_{>1}$ için $|b| \leq |a|^{\log_a(b)}$ ve $|a| \leq |b|^{\log_b(a)}$ olur. Bu nedenle,

$$|b| \leq |a|^{\log_a(b)} = |a|^{\frac{\log(b)}{\log(a)}} \;\Rightarrow\; |b|^{\frac{1}{\log(b)}} \leq |a|^{\frac{1}{\log(a)}},$$

ve

$$|a| \leq |b|^{\log_b(a)} = |b|^{\frac{\log(a)}{\log(b)}} \Rightarrow |a|^{\frac{1}{\log(a)}} \leq |b|^{\frac{1}{\log(b)}}.$$

Buradan,

$$|b|^{\frac{1}{\log(b)}} = |a|^{\frac{1}{\log(a)}}.$$

- $|a| = a^{\alpha}$ ve $|b| = b^{\beta}$, $(\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{>0})$.

- Dolayısıyla: $|a|^{\frac{1}{\log a}} = (a^{\alpha})^{\frac{1}{\log a}}$ ve $|b|^{\frac{1}{\log b}} = \left(b^{\beta}\right)^{\frac{1}{\log b}}$. Buradan,

$$b^{\beta} = (a^{\alpha})^{\frac{\log b}{\log a}} = (a^{\alpha})^{\log_a b} = \left(a^{\log_a b}\right)^{\alpha} = b^{\alpha}.$$

  Yani, $\alpha = \beta$.

Sonuç olarak, $|a| = a^{\gamma}$, $\gamma \in \mathbb{R}_{>0}$, a'dan bağımsız.

$$|a| = |a|^{\gamma}.$$

Durum (2). $\forall b \in \mathbb{Z}$, $|b| \leq 1$.

- (Hatırlatma) $\mathbb{Q}$ üzerine tanımlı $|\cdot|$ mutlak değeri aşikar değildir. O halde bir p asal sayısı vardır öyle ki $|p| \lneq 1$. Çünkü böyle olmasaydı, $\forall b \in \mathbb{Z} - \{0\}$ için $|b| = 1$ olurdu.

- l, p'den farklı herhangi bir asal sayı olsun. Bu durumda $|l| = 1$. Kabul edelim ki, $l \neq p$ iki asal sayı olsun ve $|l|, |p| \lneq 1$ şartları sağlansın. Bu durumda $\exists m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$

$$|l^m| \lneq \frac{1}{2} \quad \text{ve} \quad |p^n| \lneq \frac{1}{2}.$$

  Şimdi, $\operatorname{obeb}(l, p) = 1$ olduğundan dolayı, öyle $x, y \in \mathbb{Z}$ vardır ki

$$xl^m + yp^n = 1.$$

  Buradan,

$$1 = |1| = |xl^m + yp^n| \leq |x| \cdot |l^m| + |y| \cdot |p^n| \leq |l^m| + |p^n| \lneq 1.$$

  çelikisini elde ederiz.

Yani, p asal sayıları arasında $|p| \lneq 1$ koşulunu sağlayan tek bir tane asal sayı vardır. Buradan, $\forall n \in \mathbb{Z}$

için (obeb $(p,n)=1$ olduğundan)

$$|n| = \left|p^{\mathrm{ord}_p(n)} n\right| = |p|^{\mathrm{ord}_p(n)} = \left(\left(\frac{1}{p}\right)^{\mathrm{ord}_p(n)}\right)^{\gamma} = |n|_p^{\gamma}.$$

$\square$

Tanım 1.4. K cismi üzerinde tanımlı $|\cdot|$ mutlak değeri

$$|x+y| \leq \max(|x|,|y|), \qquad \forall x,y \in K$$

güçlü üçgen eşitsizliğini sağlıyorsa bu $|\cdot|$ mutlak değere **arşimetsel olmayan mutlak değer** denir. Aksi durumda ise **arşimetsel mutlak değer** denir.

Teorem 1.2. *$(K,|\cdot|)$ mutlak değerli bir cisim olsun.*

$$|\cdot| \text{ arşimetsel olmayan mutlak değerdir } \Leftrightarrow |\iota(\mathbb{Z})| = \{|\iota(n)| \mid n \in \mathbb{Z}\} \text{ sınırlıdır.}$$

Burada $\iota\colon \mathbb{Z} \to K$ doğal halka homomorfizmasıdır. Söyle ki:

$$\begin{aligned}
n>0 &\quad : \quad \iota\Bigg(\underbrace{1+\cdots+1}_{n \text{ kopya}}\Bigg) = \underbrace{\iota(1)+\cdots+\iota(1)}_{n \text{ kopya}} = n\cdot 1_K,\\
n=0 &\quad : \quad \iota(0_{\mathbb{Z}}) = 0_K,\\
n<0 &\quad : \quad \iota\Bigg(\underbrace{(-1)+\cdots+(-1)}_{n \text{ kopya}}\Bigg) = |n|(-1_K).
\end{aligned}$$

Kanıt. $|\cdot| : K \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mutlak değeri, her $n \in \mathbb{Z}$ için $|\iota(n)| < C$ şartını sağlasın. Her $x,y \in K$ için

$$\begin{aligned}
|(x+y)^n| &= \left|\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i y^{n-i}\right|\\
&\leq \sum_{i=0}^{n}\left|\binom{n}{i}\right|\cdot|x|^i\cdot|y|^{n-i}\\
&\leq \sum_{i=0}^{n} C\cdot\max(|x|,|y|)^n\\
&\leq C(n+1)\max(|x|,|y|)^n.
\end{aligned}$$

Buradan $|x+y|^n \leq C(n+1)\max(|x|,|y|)^n$ ve

$$|x+y| \leq (C(n+1))^{\frac{1}{n}}\max(|x|,|y|).$$

$n \to \infty$ durumunda:

$$|x+y| \leq \max\left(|x|,|y|\right)^n.$$

$\square$

Not. (i) Eğer K sonlu bir cisim ise üzerindeki $|\cdot|$ mutlak değeri arşimetsel olmayan bir mutlak değerdir.

(ii) Eğer K cisminin karakteristiği $p > 0$ ise üzerindeki $|\cdot|$ mutlak değeri arşimetsel değildir.

Gösterim. $|\cdot|_\infty$ ile arşimetsel mutlak değer gösterilir.

Teorem 1.3 (Artin-Whaples). $0 \neq x \in \mathbb{Q}$ ***için***

$$\prod_{p \leq \infty} |x|_p = 1.$$

Kanıt. $0 \neq x \in \mathbb{Q}$ için $\operatorname{ord}_p(x) = \operatorname{ord}_p(a) - \operatorname{ord}_p(b)$ olarak tanımlansın. Burada $x = \frac{x}{y}$ kesirsel ifadesini kullanıyoruz.

$$\prod_{p \leq \infty} |x|_p = |x|_\infty \prod_{p<\infty} |x|_p = |x|_\infty \prod_{p<\infty} \left(\frac{1}{p}\right)^{\operatorname{ord}_p(x)} = |x|_\infty \cdot \frac{1}{\prod\limits_{p<\infty} p^{\operatorname{ord}_p(x)}} = |x|_\infty \cdot \frac{1}{|x|_\infty} = 1.$$

$\square$

1.3 Tamlık

Tanım 1.5. Bir $(K, |\cdot|)$ mutlak değerli cisim verilsin. $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, K cisminde bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$|a_n - a_m| < \varepsilon, \qquad \forall n, m \geq N_\varepsilon$$

koşulunu sağlayan bir $N_\varepsilon \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ varsa (a_n) dizisine $|\cdot|$ mutlak değerine göre **Cauchy dizisi** denir.

Ödev. $|\cdot|$ mutlak değerine göre (a_n) dizisinin yakınsak olmasının tanımını yapın.

Tanım 1.6. Eğer $|\cdot|$ mutlak değerine göre K cismindeki (a_n) Cauchy dizileri yakınsak ise, K cismine $|\cdot|$ mutlak değerine göre **tamdır** denir.

Not. $\mathbb{Q}$ cismi $|\cdot|_\infty$ mutlak değerine göre tam değildir. Çünkü $\mathbb{Q}$ üzerinde $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ sayısına yakınsayan bir Cauchy disizi (a_n) tanımlanabilir.

Soru. Bir p asal sayısı için $\left(\mathbb{Q}, |\cdot|_p\right)$ mutlak değerli cismi tam mıdır?

Cevap. $\mathbb{Q}$ cismi $|\cdot|_p$ mutlak değerine göre tam değildir. Gerçekten de $1 \leq a \leq p-1$ için $x_n = a^{p^n}$ olsun. Bu durumda

$$x_{n+1} - x_n = a^{p^{n+1}} - a^{p^n} = a^{p^n}\left(a^{p^n(p-1)} - 1\right).$$

Ödev. $\left(a^{p^n(p-1)} - 1\right)$ ifadesinin p^n ile bölündüğünü gösteriniz.

Buradan

$$|x_{n+1} - x_n| = a^{p^n}\left(a^{p^n(p-1)} - 1\right) = \left(\frac{1}{p}\right)^{\mathrm{ord}_p(x_{n+1}-x_n)} \leq \left(\frac{1}{p}\right)^n.$$

ve bu nedenle,

$$\lim_{n\to\infty} |x_{n+1} - x_n| = 0$$

olur. Dolayısıyla, (x_n) dizisi $\mathbb{Q}$ içinde $|\cdot|_p$ mutlak değerine göre Cauchy dizisidir.

Şimdi tanımlı (x_n) dizisinin $\mathbb{Q}$ içinde $|\cdot|_p$ mutlak değerine göre bir x sayısına yakınsadığını kabul edelim. Bu durumda

$$x_n^p = \left(a^{p^n}\right)^p = a^{p^{n+1}} = x_{n+1}$$

olduğundan dolayı

$$\lim_{x\to\infty} x_n^p = \left(\lim_{x\to\infty} x_n\right)^p = x^p.$$

olur. Aynı zamanda,

$$x^p = \lim_{x\to\infty} x_n^p = \lim_{x\to\infty} x_{n+1} = x.$$

Dolayısıyla $T^p - T = 0$ denkleminin $\mathbb{Q}$ içinde p tane çözümünün olması gerekir ki bu bir çelişkidir. Sonuç olarak, $\left(\mathbb{Q}, |\cdot|_p\right)$ mutlak değerli cismi, p bir asal sayı ya da $p = \infty$ iken tam değildir.

Teorem 1.4. *Bir $(K, |\cdot|)$ mutlak değerli cismi verilsin. Bu durumda öyle bir $\left(\widehat{K}, |\cdot|\right)$ mutlak değerli cismi ve öyle bir $S\colon K \to \widehat{K}$ tasviri vardır ki aşağıdaki şartlar sağlanır:*

(i) $\widehat{K}$*,* $|\cdot|$ *mutlak değerine göre tamdır.*

(ii) $\iota\colon K \to \widehat{K}$ *eşölçülü bir gömmedir.*

(iii) $(E, |\cdot|_E)$ *tam mutlak değerli cismi ve* $\Phi\colon K \to E$ *eşölçüsü verilsin. Bu durumda:*

$$\begin{tikzcd} & \widehat{K} \arrow[dr, dashed] & \exists!\Phi_0\colon \text{ eşölçü} \\ K \arrow[ur, "\iota"] \arrow[rr, "\Phi"'] & & E \end{tikzcd}$$

(iv) $\Psi\colon K \to L$ *bir eşölçü olsun. Bu durumda*

$$\begin{tikzcd} \widehat{K} \arrow[r, dashed, "\widehat{\Psi}"] & \widehat{L} \\ K \arrow[u, "\iota_K"] \arrow[r, "\Psi"'] & L \arrow[u, "\iota_L"'] \end{tikzcd}$$

şeklini değişmeli kılan bir

$$\widehat{\Psi} \colon \widehat{K} \to \widehat{L}$$

eşölçüsü vardır.

Kanıt. $\mathcal{C}(K)$, K üzerinde tanımlı bütün Cauchy dizilerinin kümesi olsun. $\mathcal{C}(K)$ üzerine dizilerin toplaması ve çarpması, birim elemanlı bir değişmeli halka yapısı tanımlar:

$$(a_n), (b_n) \in \mathcal{C}(K) \;\Rightarrow\; (a_n) + (b_n) =: (a_n + b_n) \text{ ve } (a_n)(b_n) =: (a_n b_n).$$

$\mathcal{N}(K) = \left\{ (a_n) \;\middle|\; \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0_K \right\}$ ile $|\cdot|$ mutlak değerine göre 0_K'ye yakınsayan elemanları K'den olan (a_n) dizilerinin kümesi gösterilsin. Bu durumda, $\mathcal{N}(K)$, $\mathcal{C}(K)$ halkasının bir maksimal idealidir:

Ödev. $(a_n), (b_n) \in \mathcal{N}(K)$ ve $(c_n) \in \mathcal{C}(K)$ olsun. $(a_n) + (b_n) \in \mathcal{N}(K)$ ve $(c_n)(a_n) \in \mathcal{N}(K)$ olduğunu gösteriniz.

$(c_n) \in \mathcal{C}(K) - \mathcal{N}(K)$. Bir $(c'_n) \in \mathcal{C}(K)$ öyle ki $(c_n)(c'_n) - \mathbb{1}_{\mathcal{C}(K)} \in \mathcal{N}(K)$. O halde,

$$\mathcal{C}(K) / \mathcal{N}(K) =: \widehat{K}$$

bir cisim olur. Dahası $\alpha = (c_n) + \mathcal{N}(K) \in \widehat{K}$ için

$$|\alpha| = \lim_{n\to\infty} |c_n|$$

olarak tanımlanır.

Not. $\big| |c_n| - |c_m| \big| \leq |c_n - c_m|$.

Eğer $\alpha = (c_n) + \mathcal{N}(K) = (c'_n) + \mathcal{N}(K)$ ise $((c_n), (c'_n) \in \mathcal{C}(K))$:

$$(c'_n) = (c_n) + (\delta_n), \qquad \exists (\delta_n) \in \mathcal{N}(K).$$

Buradan,

$$\lim_{n\to\infty} |c_n| = |\alpha| = \lim_{n\to\infty} |c'_n| = \lim_{n\to\infty} |c_n + \delta_n|.$$

Not. $|c_n + \delta_n| \leq |c_n| + |\delta_n|$.

Bu tanımlı $|\cdot| : \widehat{K} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ tasviri $\widehat{K}$ üzerine bir mutlak değer tanımlar. □

Ödev. İspatın geri kalan kısmını tamamlayınız.

Tanım 1.7. $\left(\mathbb{Q}, |\cdot|_p\right)$ mutlak değerli cismin tamlanışı $\mathbb{Q}_p$ ile gösterilmektedir ve p**-sel sayı cismi** olarak adlandırılmaktadır. $\mathbb{Q}_p$ üzerine tanımlı ($\mathbb{Q}$'nun p-sel mutlak değerinden yükseltilmiş olan) mutlak değer tekrar $|\cdot|_p$ ile gösterilmektedir.

Teorem 1.5. *$a \in \mathbb{Q}_p$ olsun. Öyle bir $N \in \mathbb{Z}$ vardır ve öyle bir $a_N, a_{N+1}, \ldots, a_m, \ldots \in \{0, \ldots, p-1\}$ dizisi mevcuttur ki*

$$\left| a - \sum_{i=N}^{m} a_i p^i \right| < p^{-(m+1)}.$$

Yani

$$a = a_N p^N + \cdots + a_0 + a_1 p + \ldots + a_m p^m + \cdots$$

*eşitliği vardır ve bu özdeşliğe a'nin p-**sel açılımı** adı verilir.*

Kanıt. İlk olarak $a \in \mathbb{Q}_p$, $|a|_p = 1$ şartını sağlasın. Bu durumda $\exists! b \in \mathbb{Q}_p$ öyle ki $0 \leq b \leq p-1$ ve $|a-b|_p < 1$. Bunu ispatlayalım:

- $\mathbb{Q}$ cismi $\mathbb{Q}_p$ cismi içinde yoğundur.

- $c = \frac{d}{e}$ olsun öyle ki $d, e \in \mathbb{Z}$, $\;e \neq 0$ ve $\operatorname{obeb}(d, e) = 1$. Bu durumda $p \nmid e$ olmak zorunda. Çünkü $p \mid e$ ise, $p \nmid d$ ve

$$|c|_p = \left| \frac{d}{e} \right|_p = \left(\frac{1}{p}\right)^{\operatorname{ord}_p(d) - \operatorname{ord}_p(e)} = p \gneq 1$$

olur. Dolayısıyla,

$$|a - c|_p = \max\left(|a|_p, |c|_p\right) \gneq 1.$$

Ödev. $|a - c|_p = \max\left(|a|_p, |c|_p\right)$ olduğunu

$$|a|_p \neq |c|_p \;\Rightarrow\; |a + c|_p = \max\left(|a|_p, |c|_p\right)$$

ile çelişki elde ederek gösteriniz.

- $\operatorname{obeb}(p, e) = 1$ olduğundan dolayı $\exists x, y \in \mathbb{Z}$ öyle ki

$$xe + yp = 1.$$

Buradan,

$$\begin{aligned}
xe = 1 - yp &\Rightarrow (xe)\, c = (1 - yp)\, c \\
&\Rightarrow (xe) \cdot \frac{d}{e} = (1 - yp)\, c \\
&\Rightarrow |a - xd|_p = |a - (1 - yp)\, c|_p \\
&\Rightarrow |a - xd|_p = |a - c + ypc|_p \\
&\Rightarrow |a - xd|_p \leq \max\left(|a - c|_p\,, |ypc|_p\right).
\end{aligned}$$

Burada, $|a - c|_p \lneq 1$ ve $y \in \mathbb{Z} \Rightarrow |y|_p \leq 1$ olduğundan

$$|ypc|_p = |y|_p \cdot \frac{1}{p} \cdot |c|_p \leq \frac{1}{p} \cdot |c|_p\,.$$

Ayrıca, $|c|_p = |(c - a) + a|_p \leq \max\left(|c - a|_p\,, |a|_p\right)$. Ek olarak, $|a| = 1$ ve $|c - a|_p \lneq 1$ olduğundan,

$$|a - xd|_p \leq \frac{1}{p} < 1.$$

Şimdi p ile kalanlı bölme yaparsak:

$$xd = p\delta + \rho, \qquad \exists! \delta \in \mathbb{Z}, \quad \exists! \rho \in \{0, 1, \ldots, p - 1\}\,.$$

Buradan,

$$|a - (pd + \rho)|_p = |(a - \rho) - pd|_p\,.$$

Sonuç olarak,

$$|a - \rho|_p = |a - \rho - p\delta + p\delta|_p = |(a - xd) + pd|_p \leq \max\left(|a - xd|_p\,, |pd|_p\right) \lneq 1$$

Şimdi rastgele bir $a \in \mathbb{Q}_p$ olsun.

$$|a|_p = p^{-m}.$$

Bu durumda $|p^{-m}a|_p = 1$ olur ve ilk ispat ettiğimiz sonuca göre

$$\left|p^{-m}a - a_m\right| < 1, \qquad \exists! a_m \in \{0, \ldots, p - 1\}\,.$$

Yani, $|a - a_m p^m|_p < p^{-m}$. Tümevarım ile $a_m, a_{m+1}, \ldots$ dizisini inşa edebiliriz.

$\square$

Bölüm 2

p-sel Tamsayılar

$\mathbb{Z}_p = \left\{ x \in \mathbb{Q}_p \;\middle|\; |x|_p \leq 1 \right\}$ ile tanımlı halkaya p-**sel tamsayılar halkası** denir.

- $x, y \in \mathbb{Z}_p \;\Rightarrow\; |x \mp y|_p \leq \max\left(|x|_p, |\mp y|_p\right) = \max\left(|x|_p, |y|_p\right) \leq 1.$
- $x, y \in \mathbb{Z}_p \;\Rightarrow\; |xy|_p = |x|_p\, |y|_p \leq 1.$

Not (Önemli gözlem). (i) $\mathbb{Z}_p$ halkası yerel bir halkadır. Yani, $\langle 0 \rangle$ idealinden farklı tek bir asal ideal ideali vardır. $\mathbb{Z}_p$ halkasının bu tek asal ideali de $p\mathbb{Z}_p = \langle p \rangle$ esas idealidir.

(ii) (İzdüşümsel limit) $(I, \leq)$ kısmi sıralı bir küme olsun. Öyle ki her $i_1, i_2 \in I$ için $i_1 \leq i_3$ ve $i_2 \leq i_3$ şartını sağlayan bir $i_3 \in I$ olsun. Yani $(I, \leq)$ yönlendirilmiş küme olsun.

$\forall i \in I$ için R_i değişmeli birim elemanlı bir halka olsun. $\forall i, i' \in I$ öyle ki $i \leq i'$ için

$$f_i^{i'} : R_{i'} \to R_i$$

halka homomorfizmaları olsun, şöyle ki,

- $f_i^i = \mathrm{id}_{R_i} : R_i \to R_i$ birim halka homomorfizmasıdır.
- $\forall i, i', i'' \in I$: $i \leq i' \leq i''$ için

$$f_i^{i''} : R_{i''} \xrightarrow{f_{i'}^{i''}} R_{i'} \xrightarrow{f_i^{i'}} R_i.$$

Bu $\left(R_i; f_i^{i'} : R_{i'} \to R_i\right)_{i,i' \in I}$ topluluğuna bir **izdüşümsel sistem** adı verilir.

Örnek. $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \leftarrow \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \leftarrow \mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z} \leftarrow \cdots \leftarrow \mathbb{Z}/p^{n-1}\mathbb{Z} \leftarrow \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$

$$a_0 \leftarrowtail a_0 + a_1 p \leftarrowtail a_0 + a_1 p + a_2 p^2 \leftarrowtail \cdots \leftarrowtail a_0 + \cdots + a_{n-1} p^{n-1} \leftarrowtail a_0 + \cdots + a_n p^n.$$

Tanım 2.1 (İzdüşümsel Limit). $\varprojlim_{i \in I} R_i = \left\{ (a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} R_i \;\middle|\; f_i^{i'}(\alpha_{i'}) = \alpha_i,\; i \leq i' \right\}.$

Örnek. $\varprojlim_n \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} = \left\{ (a_n) \in \prod_n \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \;\middle|\; \pi_i^n\left(\alpha_n\right) = a_0 + a_1 p + \cdots + a_{i-1}p^{i-1},\ i \leq n \right\}$. Burada,

$$\alpha_n = a_0 + a_1 p + \cdots + a_{n-1}p^{n-1}.$$

Ödev. $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ olduğunu gösteriniz.

Teorem 2.1. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *ile* $\mathbb{Q}_p$ *içinde bir dizi gösterelim.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ \textit{dizisi} } |\cdot|_p \text{ \textit{mutlak değerine göre yakınsaktır}} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Kanıt. $\mathbb{Q}_p$ cismi içinde tanımlı (a_n) dizisi $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ şartını $|\cdot|_p$'ye göre sağlarsa, $\left(S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n\right)$ kısmi toplamlar dizisi için:

$$\lim_{N\to\infty} |S_{N+1} - S_N|_p = \lim_{N\to\infty} |a_{N+1}|_p = 0.$$

Bu sebeple, (S_N) dizisi $|\cdot|_p$ mutlak değerine göre Cauchy dizisidir. $\mathbb{Q}_p$ tam olduğundan dolayı da (S_N) dizisi yakınsaktır. $\square$

2.1 $\mathbb{Z}_p$ Halkasının İdeallerinin Yapısı

Şimdi $\mathbb{Z}_p = \left\{ \alpha \in \mathbb{Q}_p \;\middle|\; |\alpha|_p \leq 1 \right\}$ p-sel tamsayılar halkasının aritmetik yapısını, diğer bir deyişle $\mathbb{Z}_p$ halkasının ideallerinin yapısını inceleyeceğiz.

$I \neq \langle 0 \rangle$, $\mathbb{Z}_p$ halkasının bir ideali olsun. O halde, $\exists \alpha \in I$ öyle ki $\alpha \neq 0$ ve $0 < |\alpha|_p \leq 1$.

- $\exists \alpha \in I$, $|\alpha|_p = 1 \;\Rightarrow\; \alpha \in \mathbb{Z}$. Bu nedenle, $\left|\alpha^{-1}\right|_p = |\alpha|_p^{-1} = 1$ koşulu sağlanır. Yani, $\alpha^{-1} \in \mathbb{Z}_p$. Sonuç olarak, $\alpha \in I$ ve $\alpha \in \mathbb{Z}_p^*$ olduğundan $I = \mathbb{Z}_p$.

- $\forall \alpha \in I$, $|\alpha|_p \lneq 1$ ise p-sel mutlak değerin alacağı değerler $\{p^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ kümesidir. Bu sebeple, $\exists \alpha_0 \in I$ öyle ki $|\alpha|_p \leq |\alpha_0|_p = p^{-n_0} \lneq 1, \quad \forall \alpha \in I$. Buradan, $a_{n_0} \neq 0$ için

  $$\alpha_0 = a_{n_0}p^{n_0} + a_{n_0+1}p^{n_0+1} + \cdots = p^{n_0}\left(a_{n_0} + a_{n_0+1}p + \cdots\right) = p^{n_0}u.$$

  Dolayısıyla, $\exists u \in \mathbb{Z}_p^*$ öyle ki $\alpha_0 = p^{n_0}u$. Dahası, $u^{-1}\alpha_0 = p^{n_0} \in I$ ve böylece $p^{n_0}\mathbb{Z}_p \subseteq I$ olur.

  Öte yandan $0 \neq \alpha \in I$ için $p^{-m} = |\alpha|_p \leq |\alpha_0|_p = p^{-n_0}$. Buradan,

  $$\alpha = a_m p^m + a_{m+1}p^{m+1} + \cdots, \qquad n_0 \leq m, \quad a_m \neq 0.$$

Ayrıca, $\exists u \in \mathbb{Z}_p^*$ öyle ki $\alpha = p^m u = p^{n_0}\left(p^{m-n_0}u\right) \in p^{n_0}\mathbb{Z}_p$.

O halde, $p^{n_0}\mathbb{Z}_p \subseteq I \subseteq p^{n_0}\mathbb{Z}_p$ olur. Yani, $I = p^{n_0}\mathbb{Z}_p$.

Sonuç olarak, $\mathbb{Z}_p$ halkası bir esas ideal bölgesidir (EİB); ve $\mathbb{Z}_p$'deki idealler

$$p^n\mathbb{Z}_p = \left(p\mathbb{Z}_p\right)^n$$

şeklindedir. Burada $p\mathbb{Z}_p$ ideali, $\mathbb{Z}_p$ halkasının yegane asal idealidir.

2.2 p-sel Logaritma ve p-sel Üstel Fonksiyonlar

Tanım 2.2. p-**sel logaritma** ile

$$\log\left(1+x\right) := x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$$

$\mathbb{Q}_p$ katsayılı biçimsel kuvvet serisini; p-**sel üstel fonksiyonu** ile de

$$\exp\left(x\right) := 1 + x + \frac{1}{2!}\cdot x^2 + \frac{1}{3!}\cdot x^3 + \cdots$$

$\mathbb{Q}_p$ katsayılı biçimsel kuvvet serisini tanımlıyoruz.

Hatırlatma. Aşağıdaki teoremin ispatından önce basit sayılar kuramından bazı neticeleri şu şekilde yazabiliriz:

- $\mathrm{ord}_p\left(n!\right) = \mathrm{ord}_p\left(1\right) + \mathrm{ord}_p\left(2\right) + \cdots + \mathrm{ord}_p\left(n\right)$ çünkü $\mathrm{ord}_p\left(a\cdot b\right) = \mathrm{ord}_p\left(a\right) + \mathrm{ord}_p\left(b\right)$.
- $x \in \mathbb{R}$ için $n \leq x < n+1$ olsun. Bu durumda x sayısının tam değeri $\lfloor x \rfloor = n$ olur.

  $\gg$ $\mathrm{ord}_p\left(n!\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$.

  $\gg$ $\mathrm{ord}_p\left(n!\right) = \frac{n-S_n}{p-1}\cdot$ Burada S_n, n'nin p-sel açılımındaki basamakların toplamını ifade eder.

Ödev. $\mathrm{ord}_p\left(n!\right)$ için yazılmış olan son iki ifadeyi kanıtlayınız.

Teorem 2.2. $\log\left(1+x\right)$ *ve* $\exp\left(x\right)$, $\mathbb{Q}_p$ *katsayılı biçimsel kuvvet serileri* $\left\{x \in \mathbb{Q}_p \;\middle|\; |x|_p < 1\right\}$ *diskinde yakınsar. Tersi de doğrudur.*

Kanıt. İlk önce $\exp\left(x\right)$ ile ilgili kısmı ispatlayalım.

Durum $(\Rightarrow)$.

$$\exp\left(x\right) := 1 + x + \frac{1}{2!}\cdot x^2 + \frac{1}{3!}\cdot x^3 + \cdots$$

$|x|_p$ için yakınsaktır. Bu nedenle, $n \to 0$ iken, $|x|_p < 1 \;\Rightarrow\; \left|\frac{1}{n!} \cdot x^n\right|_p \to 0$ olduğunu kanıtlamalıyız.

$$\operatorname{ord}_p(n!) = \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{n}{p^i} = \frac{n}{p-1}$$

ve bu nedenle

$$\operatorname{ord}_p\left(\frac{1}{n!}\right) = -\operatorname{ord}_p(n!) = -\frac{n}{p-1}.$$

Sonuç olarak:

$$\operatorname{ord}_p\left(\frac{1}{n!} \cdot x^n\right) = \operatorname{ord}_p\left(\frac{1}{n!}\right) + n \cdot \operatorname{ord}_p(x) = n \cdot \operatorname{ord}_p(x) - \frac{n}{p-1}.$$

Buradan:

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{ord}_p\left(\frac{1}{n!} \cdot x^n\right) = \lim_{n\to\infty} n \left[\operatorname{ord}_p(x) - \frac{1}{p-1}\right] = \infty$$

ve bu nedenle

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{n!} \cdot x^n\right|_p = 0.$$

Durum $(\Leftarrow)$. $x \in \mathbb{Q}_p$ için

$$1 + x + \frac{1}{2!} \cdot x^2 + \cdots + \frac{1}{n!} \cdot x^n + \cdots$$

yakınsak olsun. O halde,

$$\left|\frac{1}{n!} \cdot x^n\right|_p \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Buradan, $n \to \infty$ durumunda

$$\operatorname{ord}_p\left(\frac{1}{n!} \cdot x^n\right) = n \left[\operatorname{ord}_p(x) - \frac{1}{p-1}\right] \to \infty.$$

$\operatorname{ord}_p(x) \leq 0$ olduğundan,

$$|x|_p = \left(\frac{1}{p}\right)^{\operatorname{ord}_p(x)} \geq 1.$$

Şimdi $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot x^n$, $\mathbb{Q}_p$ katsayılı biçimsel kuvvet serisinin $\left\{x \in \mathbb{Q}_p \;\middle|\; |x|_p < 1\right\}$ diskinde yakınsakı olduğunu kanıtlayalım.

Durum $(\Rightarrow)$. $x \in \mathbb{Q}_p$ öyle ki $|x|_p < 1$ olsun.

$$\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot x^n\right|_p \to 0, \qquad n \to \infty$$

olduğunu kanıtlayalım. Bu duruma denk olan bir durum da şudur:

$$\operatorname{ord}_p\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot x^n\right)\to\infty,\qquad n\to\infty.$$

Bu durumu ispatlamaya çalışırsak:

$$\operatorname{ord}_p\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot x^n\right)=\operatorname{ord}_p\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)+n\cdot\operatorname{ord}_p(x)=n\cdot\operatorname{ord}_p(x)-\operatorname{ord}_p(x).$$

$\operatorname{ord}_p(n)=0\leq m\in\mathbb{Z}$ öyle ki $p^m\mid n$. Buradan, $\exists n_0\in\mathbb{Z}$ öyle ki:

$$(n=p^m\cdot n_0,\ \ p\nmid n_0)\ \Rightarrow\ p^m\leq n\ \Rightarrow\ m\cdot\log p\leq\log m\ \Rightarrow\ \operatorname{ord}_p(n)=m\leq\frac{\log m}{\log p}\cdot$$

Durum ($\Leftarrow$). Ödev!

□

Not. Bir $x\in\mathbb{Z}_p$ için

$$|x|_p<p^{\frac{-1}{p-1}}\ \Leftrightarrow\ |x|_p\leq p^{-1}\ \Leftrightarrow\ x\in p\mathbb{Z}_p\ \Leftrightarrow\ |x|_p<1.$$

Teorem 2.3. (1) $\exp(\log(1+x))=1+x$ ***ve*** $\log(\exp(x))=x$ ***eşitlikleri tanımlı olduğu bölgelerde geçerlidir.***

(2) $\exp(x+y)=exp(x)\exp\exp(y)$ ***ve*** $\log((1+x)(1+y))=\log(1+x)+\log(1+y)$.

Bölüm 3

$\mathbb{Z}_p^*$ ve $\mathbb{Q}_p^*$ Gruplarının Yapıları

$\exp(x)$ ve $\log(1+x)$ p-sel fonksiyonları bize:

$$1 + p\mathbb{Z}_p \underset{\exp}{\overset{\log}{\rightleftarrows}} p\mathbb{Z}_p$$

grup izomorfizmalarını tanımlar. Burada $1 + p\mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Z}_p^*$ grubunun bir altgrubudur. $p\mathbb{Z}_p$ ile toplamsal grup olarak $\mathbb{Z}_p$ eşyapısaldır. Sonuç olarak:

$$\mathbb{Z}_p^* \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}_p^* \times \mathbb{Z}_p$$

izomorfizması vardır.

Dahası, $\alpha \in \mathbb{Q}_p^*$ için

$$\alpha = a_{-N}p^{-N} + a_{-N+1}p^{-N+1} + \cdots + a_0 + a_1 p + \cdots = p^{-N}\left(a_{-N} + a_{-N+1}p + \cdots\right).$$

$a_{-N} \neq 0$ olduğundan

$$\mathbb{Q}_p^* \cong p^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}_p^* \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z} \times \mathbb{F}_p^* \times \mathbb{Z}_p$$

olur. Burada $p^{\mathbb{Z}} = \{p^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

Bölüm 4

$\mathbb{Q}_p$ Cisminin Genişlemeleri

Soru. $K/\mathbb{Q}_p$ sonlu bir genişleme olsun.

$$\begin{tikzcd} K \arrow[d, dash, "{[K:\mathbb{Q}_p] < \infty}"'] & {|\cdot|_K\ ?} \\ \mathbb{Q}_p & {|\cdot|_p} \arrow[u, squiggly] \end{tikzcd}$$

- $|x|_K = |x|_p, \quad \forall x \in \mathbb{Q}_p$, koşulunu sağlayan K üzerine tanımlı bir $|\cdot|_K$ mutlak değeri var mıdır?
- Böyle $|\cdot|_K$ varsa, tek bir tane midir?

Tanım 4.1. K ile bir arşimetsel olmayan $|\cdot|_K$ mutlak değerli bir cismi gösterelim. V bir K-vektör uzayı olsun. V üzerine $\|\cdot\|$ **normu** ile

(i) $\|\vec{v}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}, \qquad \forall \vec{v} \in V$,

(ii) $\|\lambda \cdot \vec{v}\| = |\lambda|_K \cdot \|\vec{v}\|, \qquad \forall \lambda \in K, \quad \forall \vec{v} \in V$, ve

(iii) $\|\vec{v}_1 + \vec{v}_2\| \le \|\vec{v}_1\| + \|\vec{v}_2\|, \qquad \forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$

şartlarını sağlayan bir $\|\cdot\| : K \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ tasvirini ifade ediyoruz.

Tanım 4.2. Aynı V vektör uzayı üzerine tanımlı $\|\cdot\|_1$ ve $\|\cdot\|_2$ normları, $\forall \vec{v} \in V$ için

$$c\,\|\vec{v}\|_1 \le \|\vec{v}\|_2 \le C\,\|\vec{v}\|_1\,, \qquad \exists c, C \in \mathbb{R}_{\ge 0}$$

şartını sağlıyorsa, bu iki norm **denktir** denir ve $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$ ile gösterilir.

Teorem 4.1. *K ile arşimetsel olmayan mutlak değerli tam bir cismi ve V ile sonlu boyutlu bir K-vektör uzayını gösterelim. Bu durumda, V üzerinde tanımlı tüm normlar birbirine denktir.*

Kanıt. Bu ispatı $K = \mathbb{Q}_p$ için yapacağız. $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\} \subseteq V$ ile sabitlemiş olduğumuz K-bazını gösterelim. V üzerinde sup normu tanımlıdır: $\forall \vec{v} \in V$,

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{v}_n, \qquad \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$$

olması kaydı ile

$$\|\vec{v}\|_{sup} = \sup_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|_p .$$

V üzerine herhangi bir $\|\cdot\|$ normunu alalım. Amacımız $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_{sup}$ olduğunu göstermek.

$$\|\vec{v}\| = \|\lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{v}_n\| \leq |\lambda_1|_p \|\vec{v}_1\| + \cdots + |\lambda_n|_p \|\vec{v}_n\| \leq n \cdot \sup_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|_p \cdot \sup_{1 \leq i \leq n} \|\vec{v}_i\| .$$

$C = n \cdot \sup\limits_{1 \leq i \leq n} \|\vec{v}_i\|$ olarak tanımlarsak,

$$\|\vec{v}\| \leq C \cdot \sup_{1 \leq i \leq n} \|\vec{v}_i\| = C \cdot \|\vec{v}\|_{sup} .$$

Şimdi, $c \|\vec{v}\|_{sup} \leq \|\vec{v}\|, \quad \forall \vec{v} \in V$, şartını sağlayacak bir $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ bulacağız.

$$B = \left\{ \vec{v} \in V \;\middle|\; \|\vec{v}\|_{sup} = 1 \right\}$$

ile sup normuna göre birim çemberi düşünelim. Bu durumda $\exists \epsilon > 0$ öyle ki $\forall \vec{v} \in B$ için $\|\vec{v}\| \geq \epsilon$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki böyle bir $\epsilon > 0$ bulunmasın. O halde, $\exists (\vec{x}_n) \subset B, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ öyle ki

$$\lim_{n \to \infty} \|\vec{x}_n\| = 0.$$

B kümesi sup-norma göre dizisel kompakttır. Yani, B kümesinden seçilen herhangi bir dizinin yakınsak bir altdizisi vardır. Dolayısıyla, $(\vec{x}_n)$ dizisinin bir altdizisi $\vec{x} \in B$'ye yakınsar.

$$\|\vec{x}\| \leq \max (\|x - x_n\|, \|x_n\|) \leq \max \Big(C \cdot \|x - x_n\|_{sup}, \|x_n\| \Big) .$$

$n \to \infty$ durumunda $\|\vec{x}\| = 0$ olur ve bu nedenle $\vec{x} = \vec{0}$ olur ki bu da $\vec{x} \in B$ olması ile çelişir. O zaman, $\exists \epsilon > 0$ öyle ki

$$\epsilon \cdot \|\vec{v}\|_{sup} \leq \|\vec{v}\|, \qquad \forall \vec{v} \in B.$$

Eğer $c = \epsilon$ seçilirse ispat tamamlanmış olur. □

Şimdi $K/\mathbb{Q}_p$ sonlu genişlemesini düşünelim. $[K : \mathbb{Q}_p] = n$ olsun. Kabul edelim ki

$$|\cdot| : K \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$|\cdot|_p$ mutlak değerinin bir genişlemesi olsun. Yani,

(i) $|\alpha|_K = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0_K, \qquad \forall \alpha \in K,$

(ii) $|\lambda \cdot \alpha|_K = |\lambda|_p \cdot |\alpha|_K, \qquad \forall \lambda \in \mathbb{Q}_p, \quad \forall \alpha \in K$, ve

(iii) $|\alpha_1 + \alpha_2|_K \leq |\alpha_1|_K + |\alpha_2|_K, \qquad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in K$

şartlarını sağlar. Bu durumda, $|\cdot|_K$, $\mathbb{Q}_p$-vektör uzayı K'nin bir normudur.

Şimdi kabul edelim ki $|\cdot|_K$ ve $|\cdot|'_K$, K'nin, $|\cdot|_p$'yi genişleten iki mutlak değeri olsun. O halde, $|\cdot|_K$ ve $|\cdot|'_K$, $\mathbb{Q}_p$-vektör uzayı K'nin normlarıdır. Bir önceki teoreme göre, $\forall x \in K$ içn

$$c \cdot |x|_K \leq |x|'_K \leq C \cdot |x|_K$$

olacak şekilde $c, C > 0$ mevcuttur. Buradan,

$$c \cdot |x^n|_K \leq |x^n|'_K \leq C \cdot |x^n|_K$$

ve böylece

$$c^{\frac{1}{n}} \cdot |x|_K \leq |x|'_K \leq C^{\frac{1}{n}} \cdot |c|_K .$$

$n \to \infty$ durumunda,

$$|x|_K = |x|'_K , \qquad \forall x \in K.$$

Böylece aşağıdaki teoremdeki sonuç elde edilmiş olur:

Teorem 4.2. *$K/\mathbb{Q}_p$ sonlu genişlemesi verilsin. Bu durumda,*

$$|x|_K = |x|_p , \qquad \forall x \in \mathbb{Q}_p$$

şartını sağlayan

$$|\cdot|_K : K \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

mutlak değeri en fazla bir tanedir.

Şimdi $K/\mathbb{Q}_p$ sonlu genişlemesi için

$$|x|_K = |x|_p\,, \qquad \forall x \in \mathbb{Q}_p$$

şartını sağlayan

$$|\cdot|_K : K \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

mutlak değerini inşa edelim.

Not. $\iota\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}_p$ doğal gömme olmak üzere, $\mathbb{Z} = \iota(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{Q}_p \subset K$ olduğu için, inşa edilecek $|\cdot|_K$ mutlak değeri arşimetsel değildir.

Hatırlatma. F bir cisim olsun ve E de F üzerine sonlu, genişleme derecesi n olan, bir cisim olsun. $\alpha \in E$ için

$$m_\alpha\colon E \to E$$

gönderimini

$$x \mapsto \alpha \cdot x, \qquad \forall x \in E$$

ile tanımlayalım. $\forall x, x_1, x_2 \in E$ ve $\forall \lambda \in F$ için:

- $m_\alpha(x_1 + x_2) = m_\alpha(x_1) + m_\alpha(x_2)$ ve
- $m_\alpha(\lambda x) = \lambda \cdot m_\alpha(x)$.

B ile E'nin sıralı bir F-bazını sabitleyelim. $[m_\alpha]_B \in F^{n\times n}$ olur.

$$N_{E/F}(\alpha) := \det([m_\alpha]_B) \in F.$$

Dikkat edilirse bu tanım, E uzayının sıralı F-bazı B'den bağımsızdır, çünkü:

$$[m_\alpha]_{B'} = T_{B\to B'}\,[m_\alpha]_B\,T_{B'\to B}.$$

Burada, $T_{B\to B'}$, B bazından B' bazına taban değiştirme matrisini gösterir.

$N_{E/F}\colon E \to F$ tasvirinin sağladığı bazı önemli özellikler şunlardır:

- $N_{E/F}(0_E) = 0_F$,
- $N_{E/F}(\alpha\alpha') = N_{E/F}(\alpha)\,N_{E/F}(\alpha'), \qquad \forall \alpha, \alpha' \in E,$
- $F \subseteq F' \subseteq E$ cisimleri için $N_{E/F} = N_{F'/F} \circ N_{E/F'}$, ve
- $N_{E/F}(\alpha) = \alpha^{[E\colon F]}, \qquad \forall \alpha \in F.$

Bu son özelliği göstermek için $\alpha \in F$ olsun. m_α tasvirini, $B = \{e_1, \ldots, e_n\} \subseteq E$, F-bazına göre yazarsak:

$$[m_\alpha]_B = \left[\begin{array}{c|c|c} [m_\alpha(e_1)]_B & \cdots & [m_\alpha(e_n)]_B \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \alpha & & & \\ & \alpha & 0 & \\ & & \ddots & \\ & 0 & \alpha & \\ & & & \alpha \end{bmatrix}$$

olur. Buradan,

$$N_{E/F}(\alpha) = \det \begin{bmatrix} \alpha & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha \end{bmatrix} = \alpha^n = \alpha^{[E:F]}.$$

$K/\mathbb{Q}_p$ sonlu bir genişleme olsun ve genişleme derecesi $[K : \mathbb{Q}_p] = n$ olsun. $\forall x \in K$ için

$$|x|_K = \left|N_{K/\mathbb{Q}_p}(x)\right|^{\frac{1}{n}}$$

olsun. Bu şekilde tanımlı

$$|\cdot|_K : K \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

gönderimi

(i) $|\alpha|_K = 0 \;\Leftrightarrow\; \alpha = 0_K, \qquad \forall \alpha \in K,$

(ii) $|\alpha \cdot \beta|_K = |\alpha|_K \cdot |\beta|_K, \qquad \forall \alpha, \beta \in K$, ve

(iii) $|\alpha|_K = |\alpha|_p, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{Q}_p$

şartlarını sağlar.

Teorem 4.3. $|\cdot|_K$ *gönderimi ultrametrik eşitsizliği sağlar. Yani,*

$$|\alpha + \beta|_K \leq \max\left(|\alpha|_K, |\beta|_K\right), \qquad \forall \alpha, \beta \in K.$$

Bu teoremin ispatından önce birkaç gözlem yapalım:

- $|\alpha|_K = \left|N_{K/\mathbb{Q}_p}(\alpha)\right|_p^{\frac{1}{[K:\mathbb{Q}_p]}} = \left|N_{\mathbb{Q}_p(\alpha)/\mathbb{Q}_p}(\alpha)\right|_p^{\frac{1}{[\mathbb{Q}_p(\alpha):\mathbb{Q}_p]}}$ olur. Gerçekten de,

$$N_{K/\mathbb{Q}_p}(\alpha) = N_{\mathbb{Q}_p(\alpha)/\mathbb{Q}_p} \circ N_{K/\mathbb{Q}_p(\alpha)}(\alpha) = N_{\mathbb{Q}_p(\alpha)/\mathbb{Q}_p}\left(\alpha^{[K:\mathbb{Q}_p(\alpha)]}\right) = \left(N_{\mathbb{Q}_p(\alpha)/\mathbb{Q}_p}(\alpha)\right)^{[K:\mathbb{Q}_p(\alpha)]}$$

ve bu nedenle

$$|\alpha|_K = \left|N_{K/\mathbb{Q}_p}(\alpha)\right|_p^{\frac{1}{[K:\,\mathbb{Q}_p]}} = \left|N_{K/\mathbb{Q}_p}(\alpha)\right|_p^{\frac{[K:\,\mathbb{Q}_p(\alpha)]}{[K:\,\mathbb{Q}_p]}} = \left|N_{\mathbb{Q}_p(\alpha)/\mathbb{Q}_p}(\alpha)\right|_p^{\frac{1}{[\mathbb{Q}_p(\alpha):\,\mathbb{Q}_p]}}$$

çünkü:

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[d, dash, "{[K:\,\mathbb{Q}_p(\alpha)]}"] & \\
\alpha \in \mathbb{Q}_p(\alpha) \arrow[d, dash, "{[\mathbb{Q}_p(\alpha):\,\mathbb{Q}_p]}"] & \Longrightarrow \quad [K:\mathbb{Q}_p] = [K:\mathbb{Q}_p(\alpha)] \cdot [\mathbb{Q}_p(\alpha):\mathbb{Q}_p]. \\
\mathbb{Q}_p &
\end{tikzcd}$$

- Ultrametrik özellik ile aşağıdaki özellik birbirine denktir: (Ödev!) $\gamma \in K$ için

$$|\gamma|_K \leq 1 \;\Rightarrow\; |1+\gamma|_K \leq 1.$$

  Bunun nedenini açıklamak için ultrametrik eşitsizliğin sağlandığını kabul edelim. $\alpha, \beta \in K$ için $|\alpha|_K \leq |\beta|_K$ olsun. Buradan,

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|_K \leq 1 \;\Rightarrow\; \left|1+\frac{\alpha}{\beta}\right|_K \leq \max\left(|1|_K, \left|\frac{\alpha}{\beta}\right|_K\right) = \max\left(1, \left|\frac{\alpha}{\beta}\right|_K\right) = 1.$$

İspat etmeyi planladığımız teoremi yeniden yazabiliriz:

Teorem 4.4. $|\cdot|_K$ *gönderimi* $\gamma \in K$ *için*

$$|\gamma|_K \leq 1 \;\Rightarrow\; |1+\gamma|_K \leq 1$$

şartını sağlar.

Kanıt. $\gamma \in K$ olsun öyle ki

$$|\gamma|_K = \left|N_{\mathbb{Q}_p(\gamma)/\mathbb{Q}_p}(\gamma)\right|_p^{\frac{1}{[\mathbb{Q}_p(\gamma):\,\mathbb{Q}_p]}} \leq 1.$$

1 $\mathbb{Q}_p(\gamma) = \mathbb{Q}_p(1+\gamma)$ çünkü:

$$1+\gamma \in \mathbb{Q}_p(\gamma) \;\Rightarrow\; \mathbb{Q}_p(1+\gamma) \subseteq \mathbb{Q}_p(\gamma)$$

ve

$$\gamma = (1+\gamma) - 1 \in \mathbb{Q}_p(1+\gamma) \;\Rightarrow\; \mathbb{Q}_p(\gamma) \subseteq \mathbb{Q}_p(1+\gamma).$$

Hesaplanması gerekenler:

$$|\gamma|_K = \left|N_{\mathbb{Q}_p(\gamma)/\mathbb{Q}_p}(\alpha)\right|_p^{\frac{1}{[\mathbb{Q}_p(\gamma)\,:\,\mathbb{Q}_p]}}$$

ve

$$|1+\gamma|_K = \left|N_{\mathbb{Q}_p(\alpha)/\mathbb{Q}_p}(1+\gamma)\right|_p^{\frac{1}{[\mathbb{Q}_p(\gamma)\,:\,\mathbb{Q}_p]}}.$$

Gösterim olarak $K = \mathbb{Q}_p(\gamma)$ olsun ve $\beta = \left\{1, \gamma, \ldots, \gamma^{n-1}\right\}$ kümesini, K'nin bir $\mathbb{Q}_p$-bazı olarak sabitleyelim.

$$[K\colon \mathbb{Q}_p] = n.$$

2 $\alpha \in K$ öyle ki

$$\alpha = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \gamma^i, \qquad a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{Q}_p$$

olsun. $\|\cdot\|$ sup-normu ifade etsin. Yani,

$$\|\alpha\| = \sup_{0 \le i \le n-1} |a_i|_p.$$

$A = (a_{i,j}) \in \mathbb{Q}_p^{n\times n}$ için

$$\|A\| = \sup_{1 \le i,j \le n} |a_{i,j}|$$

ile $K^{n\times n}$'de tanımlı sup-normu gösterelim.

3 $K \xrightarrow{T} K$ herhangi bir $\mathbb{Q}_p$-doğrusal tasviri olsun. Bu durumda,

$$[T]_\beta \in \mathbb{Q}_p^{n\times n}.$$

(Özel Durum) $A \in \mathbb{Q}_p^{n\times n}$, $m_\gamma\colon K \to K$, $\mathbb{Q}_p$-doğrusal dönüşümünün β-bazına göre matrisini göstersin. Yani,

$$A = [m_\gamma]_\beta\,,\; A^2 = \left[m_{\gamma^2}\right]_\beta\,,\; \ldots,\; A^k = \left[m_{\gamma^k}\right]_\beta \in \mathbb{Q}_p^{n\times n},$$

ve $I + A = [m_{1+\gamma}]_\beta \in \mathbb{Q}_p^{n\times n}$. Bunun yanında, $p(x) \in \mathbb{Q}_p[x]$ ve

$$p(A) = \left[m_{p(\gamma)}\right]_\beta \in \mathbb{Q}_p^{n\times n}.$$

4 İddia ediyoruz ki $\{\|A^i\|\}_{i=0,1,2,\ldots}$ dizisi üstten sınırlıdır. Kabul edelim ki bu dizi üstten sınırlı olmasın. O zaman, $\exists i_j, \quad j = 1, 2, 3, \ldots$, öyle ki

$$\|A^{i_j}\| > j.$$

$b_j = \|A^{i_j}\|$, A^{i_j} matrisinde yer alan n^2-tane elemanın en büyük normunu göstersin. β_j de normu b_j olan A^{i_j} matrisinin bileşinini göstersin. O zaman,

$$|\beta_j|_p = \|A^{i_j}\| = b_j$$

olur. Eğer

$$B_j = \frac{1}{\beta_j} \cdot A^{i_j}$$

olarak tanımlarsak, $\|B_j\| = 1$ olur. Bu şekilde

$$\mathbb{B} = \left\{ M \in \mathbb{Q}_p^{n\times n} \mid \|M\| = 1 \right\}$$

sup-norma göre birim çember içinde bir $\{B_j\}_{j=1,2,3,\ldots}$ dizisi inşa ettik. $\mathbb{B}$ kompakt olduğu için $\{B_j\}_{j=1,2,3,\ldots}$ içinde yakınsak bir $\{B_{j_k}\}_{k=1,2,\ldots}$ altdizisi vardır. Bu dizinin yakınsadığı matris B olsun.

$$\det B_j = \frac{1}{\beta_j^n} \cdot \det\left(A^{i_j}\right)$$

ve böylece

$$|\det B_j|_p < \frac{\left|\det\left(A^{i_j}\right)\right|_p}{j^n} = \frac{\left|(\det A)^{i_j}\right|_p}{j^n} = \frac{\left|\left(N_{K/\mathbb{Q}_p}(\gamma)\right)^{i_j}\right|_p}{j^n} = \frac{|\gamma|_K^{n\cdot i_j}}{j^n}$$

çünkü $|\beta_j|_p > j$ ve

$$|\gamma|_K = \left|N_{K/\mathbb{Q}_p}(\alpha)\right|_p^{\frac{1}{[K\,:\,\mathbb{Q}_p]}}.$$

$|\gamma|_K \leq 1$ olduğundan,

$$|\gamma|_K \leq \frac{1}{j^n}$$

ve böylece

$$|\det B_j|_p \leq \frac{1}{n}.$$

$n \to \infty$ durumunda

$$|\det B_j|_p = 0$$

olur ve bu nedenle

$$\det B = \lim_{n\to\infty} \det B_j = 0.$$

$\det B = 0$ olmasından ötürü, $\exists l \in K - \{0\}$ öyle ki β bazına göre l'nin koordinat vektörü

$$[l]_\beta \neq \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad B\,[l]_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

şartlarını sağlar. β bazı ve $l \in K - \{0\}$ vektörü yardımıyla

$$\beta_l = \left\{l, \gamma l, \ldots, \gamma^{n-1} l\right\}$$

bazını türetelim.

$$B = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{\beta_j} \cdot A^{i_j} \;\Rightarrow\; BA^i = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{B_j} \cdot A^{i_j+i} = A^i \lim_{j\to\infty} \frac{1}{B_j} \cdot A^{i_j} = A^i B$$

olur ve bunu kullanarak

$$\left[m_{\gamma^i}(l)\right]_\beta = B\left[\gamma^i l\right]_\beta = BA^i\,[l]_\beta = A^i B\,[l]_\beta = 0$$

elde edilir.

Ödev. Herhangi bir $M = (m_{i,j}) \in \mathbb{Q}_p^{n\times n}$ için

$$|\det(M)|_p \leq \left(\max_{i,j} |m_{i,j}|_p\right)^n = \|M\|^n.$$

Sonuç olarak,

$$(I + A)^N = I + \binom{N}{1} A + \cdots + \binom{N}{N-1} A^{N-1} + A^N$$

ve bu nedenle

$$|1+\gamma|_K^N = \left|\det (I+A)^N\right|_p^{\frac{1}{n}} \leq \left\|(I+A)^N\right\| \leq \max_{0\leq i\leq N} \left\|\binom{N}{i} A^i\right\| \leq \max_{0\leq i\leq N} \left\|A^i\right\| \leq C.$$

□

Tanım 4.3. K bir cisim olsun.

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[d, dash, "\text{cebirsel genişleme}"'] \arrow[r, dash] & A = \left\{\alpha \in K \;\middle|\; \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\alpha + a_0 = 0,\ a_0, \ldots, a_n \in A_0\right\} \arrow[d, dash] \\
kesir(A) = F \arrow[r, dash] & A_0 \text{ tamlık bölgesi}
\end{tikzcd}$$

Şekildeki gibi tanımlanan A, K cisminin bir althalkasıdır ve tamlık bölgesi A_0'ın K içindeki **tamlık kapanışı** olarak adlandırılır.

Daha özel olarak, $K/\mathbb{Q}_p$ sonlu genişlemesi verilsin.

$$A = \left\{\alpha \in K \;\middle|\; \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\alpha + a_0 = 0,\ a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}_p\right\},$$

$\mathbb{Z}_p$'nin K içindeki **tamlık kapanışı** olarak adlandırılır.

Teorem 4.5. *$K/\mathbb{Q}_p$ sonlu genişlemesi için $\mathbb{Z}_p$'nin tamlık kapanışı A, $\mathbb{Q}_p$'nin bir althalkasıdır ve*

$$A = \{\alpha \in K \mid |\alpha|_K \leq 1\}$$

ile betimlenir. Dahası

$$M = \{\alpha \in K \mid |\alpha| < 1\}$$

bu A halkasının yegane maksimal idealidir. Buna ek olarak, A/M sonlu cisminin eleman sayısı olan p^f, $f \leq [K : \mathbb{Q}_p]$ koşulunu sağlar. Yani,

$$[A/M : \mathbb{F}_p] \leq [K : \mathbb{Q}_p].$$

Kanıt. $A = \{\alpha \in K \mid |\alpha|_K \leq 1\}$, K cisminin bir althalkasıdır, çünkü $\forall \alpha, \alpha' \in A$ için

$$|0|_K = 0 \leq 1 \ \Rightarrow\ 0 \in A,$$

$$|\alpha \mp \alpha'|_K \leq \max\left(|\alpha|_K, |\alpha'|_K\right) \leq 1 \ \Rightarrow\ \alpha \mp \alpha' \in A$$

ve

$$|\alpha\alpha'|_K = |\alpha|_K\, |\alpha'|_K \leq 1 \ \Rightarrow\ \alpha\alpha' \in A.$$

M, A'nın yegane maksimal idealidir. Şimdi A'nın, $\mathbb{Z}_p$'nin K içindeki tamlık kapanışı olduğunu ispat edelim. $\alpha \in K$ öyle ki

$$\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\alpha + a_0 = 0$$

koşulunu sağlayan $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{Z}_p$ olsun. Eğer $|\alpha|_K > 1$ ise,

$$|\alpha|_K^n = |\alpha^n|_K = \left|-\left(a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_0\right)\right|_K = \left|a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_0\right|_K$$

ve bu nedenle

$$|\alpha|_K^n \leq \max_{0\leq i\leq n-1} \left|a_i\alpha^i\right|_K = \max_{0\leq i\leq n-1} |\alpha|_K^i = |\alpha|_K^{n-1}.$$

Yani, $|\alpha|_K^n \leq |\alpha|_K^{n-1}$ olur ki, bu da bir çelişkidir (çünkü $|\alpha| > 1$). Dolayısıyla, $\alpha \in A$. Yani,

$$\{\alpha \in K \mid \alpha,\ \mathbb{Z}_p \text{ üzerine integral}\} \subseteq A.$$

Ters içerme için, $\alpha \in A$ seçelim. Yani $\alpha \in K$ öyle ki $|\alpha|_K \leq 1$ olsun.

$$\left|N_{K/\mathbb{Q}_p}(\alpha)\right|_p^{\frac{1}{[K\,:\,\mathbb{Q}_p]}} \leq 1$$

olur. Ayrıca, $\alpha \in K$, $\mathbb{Q}_p$ üzerine cebirsel olduğu için, $\mathbb{Q}_p$ üzerine minimal çokterimlisi vardır.

$$\mathrm{irr}_{\alpha\,;\,\mathbb{Q}_p}(x) = x^s + c_{s-1}x^{s-1} + \cdots + c_1x + c_0$$

olsun. Genelliği bozmadan $\mathrm{irr}_{\alpha\,;\,\mathbb{Q}_p}(x) = 0$ denkleminin tüm köklerinin K'de bulunduğunu kabul edebiliriz.

$$\begin{array}{rl}
 & K' = K(\alpha_1 = \alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_s) \text{ - - - - - - - - - - - - - - - - } |\cdot|_K \\
\infty > [K' : K] & \Big| \\
 & \alpha \in K \text{ - } |\cdot|_K \\
\infty > [K : \mathbb{Q}_p] & \Big| \\
 & \mathbb{Q}_p \text{ - } |\cdot|_p
\end{array}$$

$|\alpha|_K = \left|N_{K/\mathbb{Q}_p}(\alpha)\right|^{\frac{1}{d}}$ ve $|\sigma(\alpha)|_K = \left|N_{K/\mathbb{Q}_p}(\alpha)\right|$. Bu durumda herhangi bir

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, hook, "\sigma"] \arrow[d, dash] & \overline{\mathbb{Q}}_p \arrow[d, dash] \\ \mathbb{Q}_p \arrow[r, equal] & \mathbb{Q}_p \end{tikzcd}$$

$\mathbb{Q}_p$-gömmesi

$$\sigma\colon K \to \overline{\mathbb{Q}}_p$$

için $\sigma(\alpha)$, α'nın eşleniklerinden birisi olmak zorundadır, çünkü

$$\begin{aligned} 0 = \sigma(0) &= \sigma\left(\mathrm{irr}_{\alpha\,;\,\mathbb{Q}_p}(x)\right) \\ &= \sigma\left(\alpha^s + c_{s-1}\alpha^{s-1} + \cdots + c_1\alpha + c_0\right) \\ &= \sigma(\alpha)^s + c_{s-1}\sigma(\alpha)^{s-1} + \cdots + c_1\sigma(\alpha) + c_0. \end{aligned}$$

Yani, $\sigma(\alpha)$, $\mathrm{irr}_{\alpha\,;\,\mathbb{Q}_p}(x)$ çokterimlisinin diğer köklerinden birisi olmak zorundadır. Dolayısıyla,

$$|\sigma(\alpha)|_K = \left|N_{K/\mathbb{Q}_p}(\sigma(\alpha))\right|_p^{\frac{1}{[K\,:\,\mathbb{Q}_p]}}.$$

Bu durumda:

Ödev. $N_{K/\mathbb{Q}_p}(\sigma(\alpha)) = N_{K/\mathbb{Q}_p}(\alpha)$.

Bu nedenle,

$$|\sigma(\alpha)|_K = |\alpha|_K \leq 1.$$

$\mathrm{irr}_{\alpha\,;\,\mathbb{Q}_p}(x) = (x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_s)$ olduğundan dolayı $\mathrm{irr}_{\alpha\,;\,\mathbb{Q}_p}(x)$ çokterimlisinin katsayıları, $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$'nin

$$\sigma(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) \in \mathbb{Q}_p$$

simetrik çokterimlileri cinsinden yazılır. Dahası,

$$|\sigma(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)|_p \leq 1.$$

Sonuç olarak, $\alpha \in K$, $\mathbb{Z}_p$ üzerine integraldir.

Şimdi A/M cisminin $\mathbb{F}_p$ cisminin sonlu bir genişlemesi olduğunu ve

$$[A/M\colon \mathbb{F}_p] \leq [K\colon \mathbb{Q}_p]$$

eşitsizliğinin sağlandığını ispat edelim. $[K:\mathbb{Q}_p]=n$ diyelim. A/M cisminden seçeceğimiz herhangi $n+1$ tane $\overline{a}_1,\ldots,\overline{a}_{n+1}$ elemanının $\mathbb{F}_p$ üzerine doğrusal bağımlı olduğunu göstermemiz yeterlidir. Biliyoruz ki $a_1,\ldots,a_{n+1}$ doğursal bağımlıdır. Şimdi

$$b_1a_1+\cdots+b_{n+1}a_{n+1}=0$$

olacak şekilde $b_1,\ldots,b_{n+1}\in\mathbb{Q}_p$ seçelim (tabii ki hepsi birden sıfır değil). Belli bir p^t ile b_i'leri çarparak

$$\beta_i=p^tb_i\in\mathbb{Z}_p$$

yapabiliriz ve en az bir tanesi $\mathbb{Z}_p-p\mathbb{Z}_p$'ye düşsün.

Bu durumda,

$$\beta_1a_1+\cdots+\beta_{n+1}a_{n+1}=0.$$

$\mathrm{mod}\ M$'de bakarsak,

$$\overline{\beta}_1\overline{a}_1+\cdots+\overline{\beta}_{n+1}\overline{a}_{n+1}=\overline{0}.$$

$\beta_1,\ldots,\beta_{n+1}\in\mathbb{Z}_p$ olduğundan, $\overline{\beta}_1,\ldots,\overline{\beta}_{n+1}\in\mathbb{F}_p$ ve hepsi $\overline{0}$ değil, çünkü

$$\mathbb{Z}_p\hookrightarrow A\xrightarrow{\mathrm{mod}\ M}A/M$$

halka homomorfizmalarının bileşkesinin çekirdeği $ker=\mathbb{Z}_p\cap M=p\mathbb{Z}_p$ olur ve

$$\mathbb{F}_p\cong\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p\hookrightarrow A/M.$$

Sonuç olarak,

$$[A/M:\mathbb{F}_p]\le n=[K:\mathbb{Q}_p]\,.$$

□

Not (Önemli Gözlem). Önceki geliştirilen teoremler sonucu

$$\begin{array}{c}\overline{\mathbb{Q}}_p\\ \Big|\\ \mathbb{Q}_p\end{array}$$

$\mathbb{Q}_p$'deki mutlak değer tek bir şekilde, $\mathbb{Q}_p$'nin cebirsel kapanışı $\overline{\mathbb{Q}}_p$'ye genişletilebilir. Şöyle ki

$$|\cdot|_p : \overline{\mathbb{Q}}_p \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

mutlak değeri $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}_p$ için

$$|\alpha|_p = \left|N_{\mathbb{Q}_p(\alpha)/\mathbb{Q}_p}(\alpha)\right|_p^{\frac{1}{[\mathbb{Q}_p(\alpha)\,:\,\mathbb{Q}_p]}}.$$

$K/\mathbb{Q}_p$ sonlu, genişleme derecesi $[K \colon \mathbb{Q}_p] = n$ olan bir genişleme olsun. $\alpha \in K^*$ için

$$\mathrm{ord}_p(\alpha) = -\log_p |\alpha|_K .$$

Ek bir bilgi olarak, $\alpha \in \mathbb{Q}_p^*$ için de

$$|\alpha|_p = \left(\frac{1}{p}\right)^{\mathrm{ord}_p(\alpha)}.$$

Buradan, $\mathrm{ord}_p(\alpha) = -\log_p |\alpha|_p$ olsun. Bu durumda, $\alpha \in K^*$ için

$$\mathrm{ord}_p(\alpha) = -\log_p \left|N_{K/\mathbb{Q}_p}(\alpha)\right|^{\frac{1}{n}} = -\frac{1}{n} \cdot \log_p \left|N_{K/\mathbb{Q}_p}(\alpha)\right|_p$$

olur. Dahası,

$$\mathrm{ord}_p(\alpha\beta) = \mathrm{ord}_p(\alpha) + \mathrm{ord}_p(\beta), \qquad \alpha, \beta \in K^*$$

eşitliği vardır. Sonuç olarak,

$$\mathrm{ord}_p \colon K^* \to \frac{1}{n}\mathbb{Z}_+$$

bir grup homomorfizmasıdır ve görüntüsü $\mathrm{ord}_p(K^*)$,

$$\mathbb{Z} \leq \mathrm{ord}_p\left(K^{ast}\right) \leq \frac{1}{n}\mathbb{Z}$$

şartını sağlar. Bu nedenle, $\exists e \in \mathbb{Z}_{>0}$ öyle ki $e \mid n$ ve

$$\mathrm{ord}_p(K^*) = \frac{1}{e}\mathbb{Z}.$$

Bunun sebebini şu şekilde açıklayabiliriz:

$$\mathbb{Z} \leq H \leq \frac{1}{n}\mathbb{Z}_+$$

şartını sağlayan bir H grubunu düşünelim. O halde,

$$n\mathbb{Z} \leq nH \leq \mathbb{Z}_{+}$$

olur. Yani, nH, $\mathbb{Z}_{+}$ toplamsal grubunun bir altgrubudur. Bu nedenle, $nH = m\mathbb{Z}$. Sonuç olarak, $n\mathbb{Z} \leq m\mathbb{Z}$ olur ve $m \mid n$. Diyelim ki $n = m \cdot e$. O zaman,

$$H = \frac{m}{n}\mathbb{Z} = \frac{1}{e}\mathbb{Z}.$$

Tanım 4.4. $K/\mathbb{Q}_p$ genişleme derecesi $[K\colon \mathbb{Q}_p] = n$ olan sonlu bir genişleme olsun.

$$\mathrm{ord}_p\left(K^*\right) = \frac{1}{e}\mathbb{Z}$$

şartını sağlayan $e \mid n$ sayısına $K/\mathbb{Q}_p$ genişlemesinin **dallanma indeksi** adı verilir ve $e = e\left(K/\mathbb{Q}_p\right)$ ile gösterilir.

Eğer $e\left(K/\mathbb{Q}_p\right) = 1$ ise $K/\mathbb{Q}_p$ genişlemesine **dallanmamış bir genişlemedir** denir. Öte yandan, $e\left(K/\mathbb{Q}_p\right) = n$ ise $K/\mathbb{Q}_p$ genişlemesine **tamamen dallanmış bir genişlemedir** denir.

$K/\mathbb{Q}_p$ genişleme derecesi $[K\colon \mathbb{Q}_p] = n$ olan sonlu bir genişleme olsun. Bu durumda

$$\mathrm{ord}_p\left(K^*\right) = \frac{1}{e}\mathbb{Z}$$

olur ve şu tanımı verebiliriz:

Tanım 4.5. $\mathrm{ord}_p(\pi) = \frac{1}{e}$ şartını sağlayan herhangi bir $\pi \in K^*$ elemanına K cisminin bir **asal elemanı** diyeceğiz.

Gösterimi sabitleyelim. $\pi \in K$ bir asal eleman olsun. Bu durumda $x \in K^*$ için

$$x = \pi^m u$$

eşitliğini veren $m \in \mathbb{Z}$ ve $u \in K$ elemanları vardır öyle ki $|u|_K = 1$.

Gerçekten de:

$$\mathrm{ord}_p(x) = \frac{1}{e} \cdot m = \mathrm{ord}_p\left(\pi^m\right) \Rightarrow \mathrm{ord}_p\left(x \cdot \pi^{-m}\right) = \mathrm{ord}_p(x) - \mathrm{ord}_p\left(\pi^m\right) = 0$$

ve bu nedenle

$$\left|x \cdot \pi^{-m}\right|_K = 1.$$

Özel durum olarak $K/\mathbb{Q}_p$ dallanmamış bir genişleme olsun. Yani, $e = 1$. Bu durumda, $p \in K^*$ için:

$$\operatorname{ord}_p(p) = \frac{1}{n} \cdot \log_p \left| N_{K/\mathbb{Q}_p}(p) \right|_p = 1$$

ve

$$\operatorname{ord}_p(\pi) = \frac{1}{e} = 1 = \operatorname{ord}_p(p).$$

Buradan, $p = u \cdot \pi, \quad u \in K^*$ ve $|u|_K = 1$. Sonuç olarak, eğer $K/\mathbb{Q}_p$ sonlu ve dallanmamış bir genişleme ise, $p \in \mathbb{Q}_p$ asal elemanı, K içerisinde asal eleman olarak kalır.

Hatırlatma. $K/\mathbb{Q}_p$ genişleme derecesi $[K : \mathbb{Q}_p] = n$ olan sonlu bir genişleme olsun.

$$M = \{\alpha \in K \mid |\alpha|_K < 1\},$$

$A := \{\alpha \in K \mid |\alpha|_K \leq 1\}$ halkasının yegane maksimal idealidir. Ayrıca,

$$p\mathbb{Z}_p = \left\{\alpha \in \mathbb{Q}_p \;\middle|\; |\alpha|_p < 1\right\},$$

$\mathbb{Z}_p = \left\{\alpha \in \mathbb{Q}_p \;\middle|\; |\alpha|_p \leq 1\right\}$ halkasının yegane maksimal idealidir.

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[dd, dash] \arrow[dr, dash] & & \\
& A \arrow[r, rightsquigarrow] & M \\
\mathbb{Q}_p \arrow[dr, dash] & & \\
& \mathbb{Z}_p \arrow[r, rightsquigarrow] & p\mathbb{Z}_p
\end{tikzcd}$$

$\mathbb{Q}_p$'nin kalan sınıf cismi $\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p =: \kappa_{\mathbb{Q}_p}$, $\mathbb{F}_p$ cismine eşyapılıdır.

κ_K cismini, $\kappa_{\mathbb{Q}_p}$ cisminin bir genişlemesi olarak görebiliriz:

$$\mathbb{Z}_p \hookrightarrow A \xrightarrow[\text{homomorfizma}]{\text{doğal}} A/M.$$

$\mathbb{Z}_p/ker \hookrightarrow A/M$ öyle ki $ker = \mathbb{Z}_p \cap M = p\mathbb{Z}_p$. Bu nedenle,

$$\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p \hookrightarrow A/M.$$

Geçen derslerde

$$[A/M : \mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p] \leq n$$

olduğunu ispatlamıştık.

Tanım 4.6. Gösterimleri kullanmayı sürdürürsek

$$[A/M : \mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p]$$

genişleme derecesine, $K/\mathbb{Q}_p$ genişlemesinin **kalıntı derecesi** adı verilmektedir ve $f\,(K/\mathbb{Q}_p)$ ile gösterilmektedir.

Teorem 4.6. *$K/\mathbb{Q}_p$ derecesi n olan bir genişleme olsun. O halde,*

$$e\,(K/\mathbb{Q}_p)\,f\,(K/\mathbb{Q}_p) = [K : \mathbb{Q}_p] = n.$$

Kanıt. İspatın ana hatlarını özetleyelim. K cisminin tamsayılar halkasını yine A ile, ve A'nın tek maksimal idealini de M ile gösterelim.

$$\begin{array}{c} A/M \\ \Big| \\ \mathbb{F}_p = \mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p \end{array}$$

genişlemesinin sonlu olduğunu biliyoruz. $[A/M : \mathbb{F}_p] = f$ olsun. $\alpha_1, \ldots, \alpha_f \in A$ için $\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_f \in A/M$ bize bir $\mathbb{F}_p$-bazını tanımlasın.

İlk gözlemimiz, $\alpha_1, \ldots, \alpha_f \in A$ elemanlarının $\mathbb{Q}_p$ üzerine doğrusal bağımsız olduklarıdır. İkincisi de bu elemanların oluşturduğu kümenin $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_f\} \subseteq A \subseteq K$, K'de bir $\mathbb{Q}_p$-bazını tamamlamasıdır.

$$\left\{\alpha_1, \ldots, \alpha_f, \pi\alpha_1, \ldots, \pi\alpha_f, \ldots, \pi^{e-1}\alpha_1, \ldots, \pi^{e-1}\alpha_f\right\}$$

kümesi K'nin bir $\mathbb{Q}_p$-bazıdır.

Eğer $\alpha \in A$ için α'yı B kümesinin doğrusal birleşimi olarak yazabilirsek, K'nin herhangi bir β elemanını B kümesinin elemanlarının $\mathbb{Q}_p$-doğrusal birleşimi olarak yazabiliriz. Bunun sebebi de $\beta \in K \;\Rightarrow\; p^{\mu}\beta = u \cdot \pi^{m+e\mu} \in A$.

Şimdi $\alpha \in A$ için: $\{\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_f\}$, A/M'nin bir $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p$ olduğundan dolayı

$$\overline{\alpha} = \alpha \mod M = x_1\overline{\alpha}_1 + \ldots + x_f\overline{\alpha}_f, \qquad x_1, \ldots, x_f \in \mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p.$$

Buradan,

$$\alpha = X_{0,1}\alpha_1 + \ldots + X_{0,f}\alpha_f + \pi \cdot \gamma_1, \qquad \gamma_1 \in A,$$

öyle ki $X_{0,1}, \ldots, X_{0,f} \in \mathbb{Z}_p$ ve $\overline{X}_{0,1} = x_1, \ldots, \overline{X}_{0,f} = x_f$. Şimdi, γ_1 için aynı yöntermi uyguladığımız zaman

$$\alpha = (X_{0,1}\alpha_1 + \cdots + X_{0,f}\alpha_f) + \pi\,(X_{1,1}\alpha_1 + \cdots + X_{1,f}\alpha_f) + \pi^2 \cdot \gamma_2, \qquad \gamma_2 \in A.$$

Bu yöntem sürdürülerek

$$\alpha = X_{0,1}\alpha_1 + \cdots + X_{0,f}\alpha_f + X_{1,1}\alpha_1\pi + \cdots + X_{1,f}\alpha_f\pi + \cdots$$

elde edilir. □

Teorem 4.7. *$K/\mathbb{Q}_p$ sonlu bir genişleme olsun. $[K\colon \mathbb{Q}_p] = n$ verilsin. $\mathcal{S}$, K cisminin $\kappa_K = A/M$ kalıntı cisminin A'da seçilmiş temsilciler kümesini göstersin. K'nin bir asal elemanı π verilsin. Bu durumda, her $\alpha \in K$ için*

$$\alpha = \pi^{\operatorname{ord}_p(\alpha)}\,(a_0 + a_1\pi + \cdots + a_s\pi^s + \cdots)$$

eşitliğini sağlayacak tek türlü tanımlı $a_0, a_1, \ldots, a_s, \ldots \in \mathcal{S}$ mevcuttur.

4.1 $\mathbb{Q}_p$'nin Tamamen Dallanmış Sonlu Genişlemeleri

$K/\mathbb{Q}_p$, derecesi $[K\colon \mathbb{Q}_p] = n$ olan bir cisim genişlemesi olsun. Bu durumda şu denklikler mevcuttur:

- $K/\mathbb{Q}$ tamamen dallanmıştır.
- $e\,(K/\mathbb{Q}) = [K\colon K/\mathbb{Q}] = n$.
- $f\,(K/\mathbb{Q}) = 1$.
- $\kappa_K = \kappa_{\mathbb{Q}} = \mathbb{F}_p$.

Şimdi tamamen dallanmış $K/\mathbb{Q}$ sonlu genişlemesinin yapısını inceleyelim.

Gösterim. K'nin tamsayılar halkası $A = \mathcal{O}_K$ ile, O_K'nin yegane maksimal ideali de $M = \mathcal{M}_K$ ile gösterilecektir.

Tanım 4.7. $f\,(x) \in \mathcal{O}_K\,[x]$, başkatsayısı 1 olan bir çokterimli olsun:

$$f\,(x) = x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_0.$$

Eğer $f\,(x)$ çokterimlisi

(i) $a_i \equiv 0 \mod p, \qquad i = 0, 1, \ldots, m-1$ ve

(ii) $a_0 \equiv 0 \mod p^2$

şartlarını sağlıyorsa, $f(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ çokterimlisine, derecesi m olan $\mathbb{Z}_p$ üzerine tanımlı **Eisenstein çokterimlisi** denir.

Önerme 4.8. *$f(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ Eisenstein çokterimlisi ise $f(x)$ indirgenemez bir çokterimlidir.*

Kanıt. $f(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ bir Eisenstein çokterimlisi olsun ve $a(x), b(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ için

$$f(x) = a(x)\, b(x)$$

olarak yazılabilsin.

Bütün $h(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ çokterimlileri için $\overline{h(x)} = h(x) \mod p$ olsun.

O halde, $x^m = \overline{f(x)} = \overline{a(x)} \cdot \overline{b(x)}$ olur ve bu nedenle

$$\overline{a(x)} = x^{k_1}, \quad \overline{b(x)} = x^{k_2}, \quad \text{ve} \quad k_1 + k_2 = m$$

olur. Yani $a(x), b(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ çokterimlilerinin sabit terimleri sırasıyla $\alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{Z}_p$ ile gösterirsek $\alpha_0 \equiv \beta_0 \equiv 0 \mod p$ olur. Buradan,

$$\alpha_0 \beta_0 \equiv 0 \mod p^2.$$

Burada, $\alpha_0\beta_0$, Eisenstein çokterimlisi $f(x)$'in sabit terimi olmasından ötürü bir çelişki elde edilir. Sonuç olarak, $f(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ indirgenemez bir çokterimlidir. □

Teorem 4.9. *$K/\mathbb{Q}_p$ tamamen dallanmış derecesi n olan sonlu bir genişleme olsun. Yani, $n = e$. $\pi \in K$,*

$$\mathrm{ord}_p(\pi) = \frac{1}{e(K/\mathbb{Q}_p)}$$

şartını sağlayan bir eleman olsun. Yani, $\pi \in K$ asal elemanlardan birisi olsun. Bu durumda, π, bir

$$x^e + a_{e-1}x^{e-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}_p[x]$$

Eisentein çokterimlisinin bir köküdür. Yani, $a_0, a_1, \ldots, a_{e-1} \equiv 0 \mod p$ ve $a_0 \not\equiv 0 \mod p^2$.

Öte yandan, eğer $\alpha \in K$, derecesi e olan $\mathbb{Z}_p$ üzerinde tanımlı bir Eisenstein çokterimlisinin kökü ise, $\mathbb{Q}_p(\alpha)/\mathbb{Q}_p$ genişleme derecesi $e = n$ olan tamamen dallanmış bir genişleme olur ve $\alpha \in \mathbb{Q}_p(\alpha)$ bir asal elemandır.

Kanıt. $K/\mathbb{Q}_p$ tamamen dallanmış bir genişleme olsun. π ile K'nin asal bir elemanını gösterelim. Ayrıca,

$$x^e + a_{e-1}x^{e-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Q}_p[x]$$

π asal elemanının minimal çokterimlisi olsun. Bu durumda π ve π'nin eşleniklerinden türetilen $\sigma(\pi_1, \ldots, \pi_e)$ simetrik çokterimlilerdir ve

$$|\sigma(\pi_1, \ldots, \pi_e)|_K \leq \left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{e}} \lneq 1$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan, $x^e + a_{e-1}x^{e-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}_p[x]$ ve $a_{e-1}, \ldots, a_1, a_0 \equiv 0 \mod p$. Dahası,

$$|a_0|_p = \left|N_{K/\mathbb{Q}_p}(\pi)\right|_p = \frac{1}{p}.$$

Sonuç olarak, $x^e + a_{e-1}x^{e-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ bir Eisenstein çokterimlisidir. $K = \mathbb{Q}_p(\pi)$.

Öte yandan, derecesi e olan bir $K/\mathbb{Q}_p$ sonlu genişleme alalım. Kabul edelim ki α'nın $\mathbb{Q}_p$ üzerine minimal çokterimlisi

$$\mathrm{irr}_{\alpha\,;\,\mathbb{Q}_p}(x) = x^e + a_{e-1}x^{e-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}_p[x]$$

şeklinde bir Eisenstein çokterimlisi olsun. O zaman, $\mathrm{ord}_p(a_0) = 1$. Buradan, $a_0 \equiv 0 \mod p$ ve $a_0 \not\equiv 0 \mod p^2$. O halde, $a_0 = 0$ ve $a_1 \neq 0$ ike $a_0 = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots$. Dolayısıyla

$$\mathrm{ord}_p(\alpha) = \frac{1}{e} \cdot \mathrm{ord}_p\left(N_{K/\mathbb{Q}_p}(\alpha)\right) = \frac{1}{e} \cdot \mathrm{ord}_p(a_0) = \frac{1}{e}$$

ve bu nedenle dallanma indeksi $[K : \mathbb{Q}_p]$ değerine eşit olur. Sonuç olarak, $K/\mathbb{Q}_p$ tamamen dallanmış bir genişlemedir. □

Lemma 4.10 (Hensel lemması). *$K/\mathbb{Q}_p$ sonlu genişlemesi verilsin ve π ile de K'nin bir asal elemanını gösterelim. Başkatsayısı 1 olan $f(x) \in \mathcal{O}_K[x]$ çokterimlisi için kabul edelim ki bir $\alpha \in \mathcal{O}_K$,*

(i) $|f(\alpha)|_K \lneq 1$ *ve*

(ii) $|f'(\alpha)| = 1$

şartları sağlansın. Bu durumda $\exists! \beta \in \mathcal{O}_K$ öyle ki

$$f(\beta) = 0 \quad \textit{ve} \quad |\beta - \alpha|_K < |f(\alpha)|_K .$$

Sonuç 4.10.1 (Hensel lemmasının özel bir hali). *Başkatsayısı 1 olan $f(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ çokterimlisi için kabul edelim ki $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ var olsun öyle ki* *(i)* $f(\alpha) \equiv 0 \mod p$ *ve*

(ii) $f'(\alpha) \not\equiv 0 \mod p$.

Bu durumda $\exists ! \beta \in \mathbb{Z}_p$ *öyle ki*

$$f(\beta) = 0 \quad \textit{ve} \quad \beta \equiv \alpha \mod p.$$

Kanıt. $\beta \equiv \alpha \mod p$ şartını sağlayan $\beta \in \mathbb{Z}_p$ sayısını bir dizi ile inşa edeceğiz:

$$\alpha = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots, \qquad a_i \in \{0, 1, \ldots, p-1\}.$$

$n = 0$ için $b_0 = a_0$ olur. $n = 1$ için:

$$f(a_0 + b_1 p) = \sum_{i=0}^{N} c_i (a_0 + b_1 p)^i .$$

Bu nedenle,

$$f(a_0 + b_1 p) = f(a_0) + f'(a_0) b_1 p + p^2 (\cdots).$$

Dolayısıyla,

$$f(a_0 + b_1 p) \equiv f(a_0) + f'(a_0) b_1 p \mod p^2.$$

Hangi $b_1 \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ için

$$f(a_0) + f'(a_0) b_1 p \equiv 0 \mod p^2$$

sağlanır? Tabii ki aşağıdaki koşulu sağlayan b_1 için:

$$b_1 \equiv -\frac{f(a_0)}{p f'(a_0)} \mod p^2.$$

Burada $f'(a_0) \equiv f'(\alpha) \not\equiv 0 \mod p$. $\square$

4.2 $\mathbb{Q}_p$'nin Dallanmamış Genişlemeleri

Teorem 4.11. $0 < f \in \mathbb{Z}$ *için,* $\mathbb{Q}_p$ *cisminin sadece bir tane genişleme derecesi* f *olan* K_f^{ur} *dallanmamış genişlemesi vardır ve bu genişleme,* $\xi_{p^f-1} \in \overline{\mathbb{Q}}_p$ *ile bir ilkel birim kökü göstermek kaydı ile,*

$$K_f^{ur} = \mathbb{Q}_p\left(\xi_{p^f-1}\right)$$

şeklinde elde edilir.

Kanıt. $\mathbb{F}_{p^f}$ ile $\mathbb{F}_p$ cisminin genişleme derecesi f olan genişlemesini gösterelim. Bu sonlu cismin p^f elemanı vardır.

$$\begin{array}{c} \mathbb{F}_{p^f} \\ \Big| \; f = \left[\mathbb{F}_{p^f} : \mathbb{F}_p\right] \\ \mathbb{F}_p \end{array}$$

$\mathbb{F}_{p^f}^*$ çarpımsal grubu devirli bir gruptur. $\overline{\alpha} \in \mathbb{F}_{p^f}^*$ ile bu $\mathbb{F}_{p^f}^*$ grubunun bir üretecini gösterelim. $\overline{\alpha} \in \mathbb{F}_{p^f}$ elemanı, $\mathbb{F}_p$ üzerine cebirseldir.

$$\overline{p}(x) = x^f + \overline{a_1}x^{f-1} + \cdots + \overline{a}_f \in \mathbb{F}_p[x] = \mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p,$$

$\overline{\alpha}$'nın $\mathbb{F}_p$ üzerine minimal çokterimlisini göstersin. Her $i = 1, \ldots, f$ için öyle $a_i \in \mathbb{Z}_p$ seçelim ki

$$p(x) = x^f + a_1x^{f-1} + \cdots + a_f \in \mathbb{Z}_p[x] \subset \mathbb{Q}_p[x]$$

ve

$$p(x) \mod p\mathbb{Z}_p = \overline{p}(x)$$

olsun. $p(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ indirgenemez bir çokterimlidir çünkü başkatsayıları 1 olan $a(x), b(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ çokterimlileri $p(x) = a(x)b(x)$ şartını sağlasaydı, $\overline{p}(x) = \overline{a}(x)\overline{b}(x)$ ile $\overline{p}(x)$ çokterimlisinin indirgenemez olması ile çelişirdi. Son lemmadan, $p(x) \in \mathbb{Q}_p[x]$ indirgenmezdir. $\square$

$\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}_p$ ile $p(x) = 0$ denkleminin çözümünü alalım. $\widetilde{K} = \mathbb{Q}_p(\alpha)$ cismini düşünelim. $\widetilde{K}/\mathbb{Q}_p$ genişleme derecesi f olan bir genişlemedir.

$$[K : \mathbb{Q}_p] = \left[\mathcal{O}_{\widetilde{K}}/\mathcal{M}_{\widetilde{K}} : \mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p\right].$$

$\left[\widetilde{K} : \mathbb{Q}_p\right] = f\left(\widetilde{K}/\mathbb{Q}_p\right)e\left(\widetilde{K}/\mathbb{Q}_p\right)$ eşitliğini biliyoruz. Dolayısıyla,

$$f\left(\widetilde{K}/\mathbb{Q}_p\right) \leq \left[\widetilde{K} : \mathbb{Q}_p\right] = f.$$

$\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}_p$ aynı zamanda $\mathcal{O}_{\widetilde{K}}$'nin içindedir, çünkü α'nın $\mathbb{Q}_p$ üzerine minimal çokterimlisi

$$p(x) = x^f + a_1x^{f-1} + \cdots + a_f \in \mathbb{Z}_p[x].$$

$\alpha + \mathcal{M}_{\widetilde{K}} \in \mathcal{O}_{\widetilde{K}/\mathcal{M}_{\widetilde{K}}}$ olduğunu göstermek istiyoruz.

$$\left(\alpha + \mathcal{M}_{\widetilde{K}}\right)^f + \left(a_1 + \mathcal{M}_{\widetilde{K}}\right)\left(\alpha + \mathcal{M}_{\widetilde{K}}\right)^{f-1} + \cdots + \left(a_f + \mathcal{M}_{\widetilde{K}}\right).$$

$\mathbb{Z}_p \cap \mathcal{M}_{\widetilde{K}} = p\mathbb{Z}_p$ ve $\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p \hookrightarrow \mathcal{O}_{\widetilde{K}}/\mathcal{M}_{\widetilde{K}}$ olduğundan dolayı $\alpha + \mathcal{M}_{\widetilde{K}} \in \mathcal{O}_{\widetilde{K}}/\mathcal{M}_{\widetilde{K}}$ elemanı, $\overline{p}(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ indirgenemez çokterimlisinin bir köküdür. Buradan, $f \leq f\left(\widetilde{K}/\mathbb{Q}_p\right)$ olur. Daha önceden bulduğumuz gibi aynı zamanda $f\left(\widetilde{K}/\mathbb{Q}_p\right) \leq f$ idi. Yani, $f\left(\widetilde{K}/\mathbb{Q}_p\right) = f$. Sonuç olarak, $\widetilde{K}/\mathbb{Q}_p$ dallanmamış bir genişlemedir.

$$\widetilde{K} = \mathbb{Q}_p\left(\xi_{p^f-1}\right).$$

Gösterim. $\mathbb{F}_{p^f}$ ile $\mathbb{F}_p$ üzerinde genişleme derecesi f olan p^f elemanlı sonlu cismi gösteriyoruz.

$\overline{\alpha} \in \mathbb{F}_f^*$ grubunun bir üreteci olsun. Bu durumda;

$$\overline{\alpha}^{p^f-1} - \overline{1} = \overline{0}.$$

$\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}_p$ vardır ki:

$$\alpha \equiv \overline{\alpha} \mod \mathcal{M}_{\mathbb{Q}_p(\alpha)} \quad \text{ve} \quad \overline{\alpha}^{p^{-1}} - \overline{1} = \overline{0}.$$

Hensel'in lemmasından $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}_p$ ilkel p^f-1. birim köktür çünkü $\alpha^{p^f-1} = 0$. Bu nedenle,

$$\mathbb{Q}_p(\alpha) = \mathbb{Q}_p\left(\xi_{p^f-1}\right) =: K_f^{ur},$$

$\mathbb{Q}_p$ üzerine genişleme derecesi f olan dallanmamış herhangi bir genellemedir.

Ödev. $f_1 \mid f_2 \ \Rightarrow\ K_{f_1}^{ur} \subseteq K_{f_2}^{ur}$.

Dolayısıyla:

$$\bigcup_{f\geq 1} K_f^{ur} \subseteq \overline{\mathbb{Q}}_p$$

ki bu birleşim $\overline{\mathbb{Q}}_p$ cisminin bir altcismidir. $\alpha \in K_{f_1}^{ur}$ ve $\beta \in K_{f_2}^{ur}$ olacak şekilde $1 \leq f_1, f_2 \in \mathbb{Z}$ vardır.

Ödev. $f_1 \mid f_1f_2,\ f_2 \mid f_1f_2 \ \Rightarrow\ \alpha, \beta \in K_{f_1f_2}^{ur}$.

Dahası: $\alpha \mp \beta$, $\alpha\beta$, $\alpha/\beta \in K_{f_1f_2}^{ur}$. Ayrıca, $\alpha \mp \beta$, $\alpha\beta$, $\alpha/\beta \in \bigcup_{f\geq 1} K_f^{ur}$.

Tanım 4.8. $\bigcup_{f\geq 1} K_f^{ur} =: \mathbb{Q}_p^{ur}$ ile gösterilen $\mathbb{Q}_p$'nin genişlemesine, $\mathbb{Q}_p$'nin **maksimal dallanmamış genişlemesi** adı verilir.

$\mathbb{Q}_p^{ur}$ cismi aritmetiksel olmayan mutlak değerli bir cisimdir ve $|\cdot|_p$ ile gösterilen bu mutlak değer $\overline{\mathbb{Q}}_p$ üzerine $\mathbb{Q}_p$'nin $|\cdot|_p$ mutlak değeri tarafından tamamlanmış olan $|\cdot|_p$ mutlak değerinin $\mathbb{Q}_p^{ur}$'ye kıstırılmasından elde edilir.

$$\mathbb{Z}_p^{ur} = \left\{ \alpha \in \mathbb{Q}_p^{ur} \;\middle|\; |\alpha|_p \leq 1 \right\}$$

halkası $\mathbb{Q}_p^{ur}$ cisminin tamsayılar halkasıdır. Bu halkanın tek bir $\mathcal{M}_p^{ur}$ maksimal ideali vardır ve

$$\mathcal{M}_p^{ur} = \left\{ \alpha \in \mathbb{Q}_p^{ur} \;\middle|\; |\alpha|_p < 1 \right\}$$

olarak tanımlanır. Bu durumda

$$\mathbb{Z}_p^{ur}/\mathcal{M}_p^{ur} = \overline{\mathbb{F}}_p = \bigcup_{f \geq 1} \mathbb{F}_{p^f}.$$

Not. $K/\mathbb{Q}_p$ derecesi $i = e\,(K/\mathbb{Q}_p)\, f\,(K/\mathbb{Q}_p) =: e \cdot f$ olan bir genişleme olsun. Bu durumda α, K_f^{ur}-katsayılı derecesi e olan bir Eisenstein çokterimlisinin kökü olmak üzere:

$$\begin{tikzcd}
K = K_f^{ur}\,(\alpha) \arrow[d, dash, "{\left[K : K_f^{ur}\right] = e}"] \\
K_f^{ur} = \mathbb{Q}_p\left(\xi_{p^f-1}\right) \arrow[d, dash, "{\left[K_f^{ur} : \mathbb{Q}_p\right] = f}"] \\
\mathbb{Q}_p
\end{tikzcd}$$

Bölüm 5

Tate Cismi Ω_p

Gösterim. $\overline{\mathbb{Q}}_p$ ile $\mathbb{Q}_p$'nin cebirsel kapanışını gösterelim.

Daha önce yaptıklarımızdan, $\mathbb{Q}_p$ üzerine tanımlı olan $|\cdot|_p$ p-sel mutlak değeri tek bir şekilde $\overline{\mathbb{Q}}_p$ cismine yükseltmek mümkündür. $\overline{\mathbb{Q}}_p$ üzerine tanımlı bu mutlak değer tekrar $|\cdot|_p$ ile gösterilecek.

Teorem 5.1. *$\overline{\mathbb{Q}}_p$ cismi $|\cdot|_p$ mutlak değerine göre tam değildir.*

Kanıt. $\overline{\mathbb{Q}}_p$ cismi içinde yakınsak olmayan bir $\{a_i\}$ Cauchy dizisi inşa etmemiz gerekiyor.

- b_i, $\overline{\mathbb{Q}}_p$ içinde bir ilkel p^2-1. kök. Yani, $b_i^{p^2-1}=1$ ve bütün $m \lneq p^2-1$ için $b_i^m \neq 1$. Bu durumda $i' > i$ için:

  Ödev. $2^i \mid 2^{i'} \;\Rightarrow\; \left(p^{2^i-1}-1\right) \Big| \left(p^{2^{i'}}-1\right)$.

  Buradan $b_i^{p^{2^i}-1}=1 \;\Rightarrow\; b_i^{p^{2^{i'}}-1}=1$ olur. Yani, $i' > i$ ise b_i sayısı, $b_{i'}$ sayısının bir kuvveti olur.

- $a_i = \sum\limits_{j=0}^{i} b_j p^{N_j}$. Burada

  $\gg$ $0 = N_0 < N_1 < N_2 < \cdots < N_i < \cdots$ artan 0'dan büyük tamsayılar dizisidir.

  $\gg$ b_j'ler, $\;j=0,\ldots,i,\;$ a_j sayısının p-sel açılımında yer alan Teichmüller basamaklarıdır.

  Sonuç olarak, $\{a_i\}$ bir Cauchy dizisidir:

  $$|a_{i+1}-a_i|_p = \left|b_{i+1}p^{N_{i+1}}\right|_p = \left|\frac{1}{p}\right|^{N_{i+1}}$$

  ve böylece

  $$\lim_{i\to\infty}|a_{i+1}-a_i|_p = \left(\frac{1}{p}\right)^{N_{i+1}} = 0.$$

- $0 = N_0 < N_1 < N_2 < \cdots$ artan tamsayılar dizisini özel olarak seçeceğiz. İlk olarak N_j tamsayıları, $j = 0, 1, \ldots, i$ için tanımlanmış olsun.

$$a_i = \sum_{j=0}^{i} b_j p^{N_i} \in \mathbb{Q}_p\left(b_i\right).$$

İkinci bir sonuç olarak, $K = \mathbb{Q}_p\left(b_i\right) = \mathbb{Q}_p\left(a_i\right)$. Burada, $\mathbb{Q}_p\left(b_i\right)$, $\mathbb{Q}_p$ üzerine Galois dallanmamış ve genişleme derecesi 2^i olan tek genişlemedir.

Açık olarak $\mathbb{Q}_p\left(b_i\right) \subseteq \mathbb{Q}_p\left(a_i\right)$.

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, dash] & K \arrow[d, dash] \\
\mathbb{Q}_p \arrow[r, equal] & \mathbb{Q}_p
\end{tikzcd}$$

şartını sağlayan bir σ $\mathbb{Q}_p$-otomorfizması alalım. a_i'yi sabitleyecek, aşikar olmayan bir σ mevcut değildir:

$$\sigma\left(a_i\right) = \sigma\left(\sum_{j=0}^{i} b_j p^{N_j}\right) = \sum_{j=0}^{i} \sigma\left(b_j\right) p^{N_j}.$$

$\sigma\colon K = \mathbb{Q}_p\left(b_i\right) \to K$ aşikar olmayan bir $\mathbb{Q}_p$-otomorfizması. Bu nedenle $\sigma\left(b_i\right) \neq b_i$. Buradan,

$$\sigma\left(a_i\right) = \sum_{j=0}^{i} \sigma\left(b_j\right) p^{N_j} \neq \sum_{j=0}^{i} b_j p^{N_j} = a_i$$

çünkü b_j, $\quad j = 0, \ldots, i$, Teichmüller basamaklarını gösterir. $\sigma\left(b_i\right)^{p^{2^i}-1} - 1 = 0$. Dolayısıyla,

$$\mathbb{Q}_p\left(a_i\right) = \mathbb{Q}_p\left(b_i\right) = K.$$

Ödev. $\exists N_{i+1} > N_i$ öyle ki a_i, $n < 2$,

$$\alpha_n a_i^n + \alpha_{n-1} a_i^{n-1} + \cdots + \alpha_1 a_i + \alpha_0 \equiv 0 \mod p^{N_{i+1}}$$

$\mod p^{N_{i+1}}$-denklemlerininn hiçbirini sağlamaz.

- Şimdi $\{a_i\}$ Cauchy dizisinin $\overline{\mathbb{Q}}_p$ içinde yakınsak olmadığını göreceğiz. Kabul edelim ki $\exists a \in \overline{\mathbb{Q}}_p$ öyle ki $\lim\limits_{i\to\infty} a_i = a$ olsun. $a \in \overline{\mathbb{Q}}_p$ olduğundan dolayı, a elemanı $\mathbb{Q}_p$ üzerine cebirseldir. Yani, hepsi p ile bölünmeyen $\exists \alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{Z}_p$ öyle ki

$$\alpha_n a^n + \alpha_{n-1} a^{n-1} + \cdots + \alpha_1 a + \alpha_0 = 0.$$

$2^i > n$ olacak şekilde i seçelim. O zaman $a \equiv a_i \mod p^{N_{i+1}}$ olur. $a_i = \sum_{j=0}^{i} b_j p^{N_j}$ olduğundan

$$0 = \alpha_n a^n + \alpha_{n-1} a^{n-1} + \cdots + \alpha_1 a + \alpha_0 \equiv \alpha_n a_i^n + \alpha_{n-1} a_i^{n-1} + \cdots + \alpha_1 a_i + \alpha_0 \mod p^{N_{i+1}}.$$

□

Tanım 5.1. $\widehat{\overline{\mathbb{Q}}}_p$, $\overline{\mathbb{Q}}_p$ cisminin $|\cdot|_p$ mutlak değerine göre tamlanışına **Tate cismi** denir.

Gösterim. Tate cismi Ω_p ya da $\mathbb{C}_p$ ile gösterilir.

Lemma 5.2 (Krasner'in lemması). *K ile tam, arşimetsel olmayan mutlak değerli bir cismi gösterelim. $f(x) \in K[x]$ çokterimlisinin köklerini $\alpha_1, \ldots, \alpha_d \in \overline{K}$ ile gösterelim. Eğer $\beta \in \overline{K}$*

$$|\beta - \alpha_1| < |\alpha_1 - \alpha_i|, \qquad \forall i \in \{2, \ldots, d\}$$

şartını sağlarsa $K(\alpha_1) \subseteq K(\beta)$ olur.

Kanıt. $L = K(\beta)$ ve $M = L(\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ olsun. Yani, M cismi $f(x)$ çokterimlisinin parçalanış cismidir. Buradan, M/L bir Galois genişlemesidir. $\sigma \in \mathrm{Gal}(M/L)$ olsun. Mutlak değerin Galois değişmezliğinden dolayı

$$|\beta - \alpha_1| = |\sigma(\beta - \alpha_1)| = |\beta - \sigma(\alpha_1)|$$

olur ve bu nedenle

$$|\alpha_1 - \sigma(\alpha_1)| \leq \max(|\alpha_1 - \beta|, |\beta - \sigma(\alpha_1)|) = \max(|\alpha_1 - \beta|, |\beta - \alpha_1|) = |\alpha_1 - \beta|.$$

□

Teorem 5.3. *Ω_p cismi cebirsel olarak kapalıdır.*

Kanıt. $\overline{\Omega}_p$ ile Ω_p cisminin cebirsel kapanışını gösterelim. $\alpha \in \overline{\Omega}_p$ olsun. $f(x) := \mathrm{irr}_{\alpha\,;\,\Omega_p}(x) \in \Omega_p[x]$, α'nın Ω_p üzerine minimal çokterimlisi olsun. Ω_p üzerinde $|\cdot|$ mutlak değeri olan bir cisimdir.

$$\mathcal{O} = \{\beta \in \Omega_p \mid |\beta| \leq 1\},$$

Ω_p cisminin değerlendirme halkası olsun. $\alpha \in \overline{\Omega}_p$ gerekli şekilde ayarlanarak kabul edilebilir ki $\mathrm{irr}_{\alpha\,;\,\mathcal{O}}(x) = f(x) \in \mathcal{O}[x]$ başkatsayısı 1 olan bir çokterimli olsun:

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0, \qquad a_i \in \mathcal{O}$$

ve $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, $f(x)$ çokterimlisinin $\overline{\Omega}_p$ içindeki kökleri olsun.

$$C = \min_{i \neq 1} |\alpha - \alpha_i| \,.$$

$g(x) = x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0 \in \mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}}_p}[x]$ şöyle ki $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$:

$$|a_i - b_i| < C^n.$$

Burada $b_1, \ldots, b_n \in \mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$ seçimini yapabiliriz, çünkü $\Omega_p = \widehat{\overline{\mathbb{Q}}}_p$ olduğundan dolayı $\overline{\mathbb{Q}}_p$, Ω_p içinde ve $\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$, $\mathcal{O}$ içinde yoğundur. $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \Omega_p$, $g(x)$ çokterimlisinin kökleri olsun. Bu durumda:

$$g(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - \beta_i)$$

ve böylece $f(\alpha) = 0$ olduğundan

$$\prod_{i=1}^{n} |\alpha - \beta_i| = |g(\alpha)| = |g(\alpha) - f(\alpha)| = \left|(a_{n-1} - b_{n-1})\,\alpha^{n-1} + \cdots + (a_0 - b_0)\right|$$

ve bu nedenle

$$\prod_{i=1}^{n} |\alpha - \beta_i| \leq \max_i |a_i - b_i| \cdot |\alpha|^{n-1} \leq \max_i |a_i - b_i| \lneq C.$$

Sonuç olarak,

$$|\alpha - \beta_i| < C = \min_{i \neq 1} |\alpha - \alpha_i| \leq |\alpha - \alpha_i| \,, \qquad i = 2, \ldots, n.$$

Krasner'in lemmasından, $\alpha \in \Omega_p(\beta_i) = \Omega_p$ olur. Dolayısıyla, $\alpha \in \overline{\Omega}_p \;\Rightarrow\; \alpha \in \Omega_p$. Kısaca, $\overline{\Omega}_p = \Omega_p$ olur. Yani, Ω_p cebirsel olarak kapalıdır. □

$$\begin{array}{ccc}
\Omega_p & \mathrm{ord}_p & \mathbb{R}\text{-değerli} \\
\uparrow & \uparrow & \\
\overline{\mathbb{Q}}_p & \mathrm{ord}_p & \mathbb{Q}\text{-değerli} \\
\uparrow & \uparrow & \\
\mathbb{Q}_p & \mathrm{ord}_p & \mathbb{Z}\text{-değerli}
\end{array}$$

Kaynaklar

[1] F. Q. Gouvêa, **p-adic Numbers: An Introduction**, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1993.

[2] N. Koblitz, **p-adic Numbers, p-adic Analysis, and Zeta Functions**, 2nd edition, Graduate Texts in Mathematics Vol. 58, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1984.