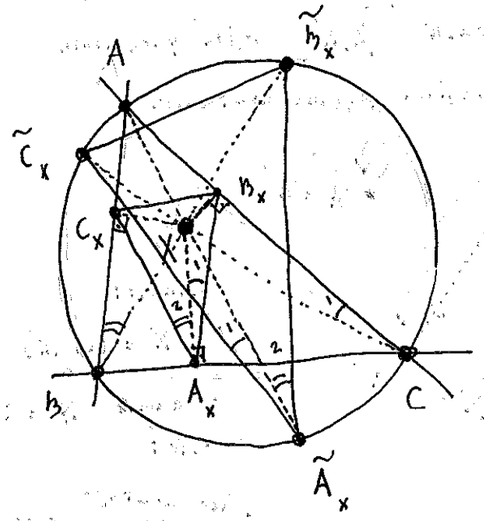
Giulio Carlo Fagnano (di Toschi) 1682 - 1766

(Verilen bir üçgene göre!)
Bir noktanın ayak üçgeni ve ayakötesi üçgeni :



X noktasının ayak üçgeni: $A_x B_x C_x$

&

ayakötesi üçgeni: $\tilde{A}_x \tilde{B}_x \tilde{C}_x$.

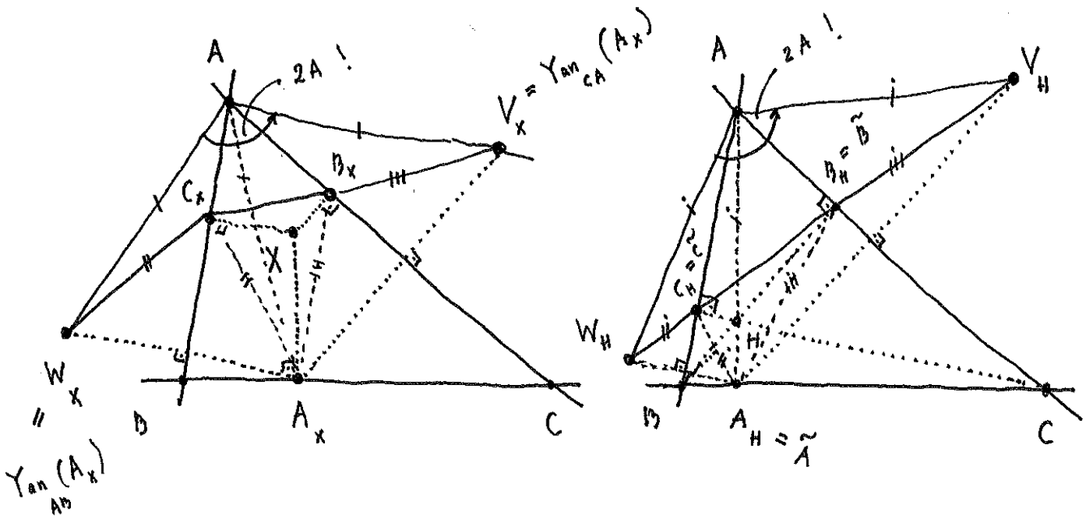
Dikkat: $\measuredangle(A_x B_x, A_x C_x) = \measuredangle(\tilde{A}_x \tilde{B}_x, \tilde{A}_x \tilde{C}_x)$
ve diğerleri...

Dolayısıyla (aynı yönde!) $A_x B_x C_x \overset{+}{\simeq} \tilde{A}_x \tilde{B}_x \tilde{C}_x$

§28. Misal : "Fagnano Problemi" !?!

($\mod 2\pi$ bir miktarın "mutlak değeri" nedir?)

ABC dar açılı bir üçgen olsun. ($|\measuredangle A|, |\measuredangle B|, |\measuredangle C| < 90°$)
Nasıl bir üçgene göre hangi noktanın ayak üçgeninin çevresi en küçük değeri alır? Cevap : H, "diklik merkezi"!



(Önce, V_H, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$, W_H noktalarının doğrudaş olduğu hususu ele alınsın!)

$$|A_H B_H| + |B_H C_H| + |C_H A_H| \overset{\tilde{B}}{=} \overset{\tilde{C}}{=} |V_H \tilde{B}| + |\tilde{B}\tilde{C}| + |\tilde{C} W_H| \quad \left(= \frac{|AA_x| \quad |AA_H|}{|AV_x| \geq |AV_H| \text{ olduğundan}}\right)$$

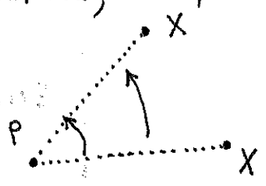
$$= |V_H W_H| \leq |V_x W_x|$$

$$\leq |V_x B_x| + |B_x C_x| + |C_x W_x|$$

$$= |A_x B_x| + |B_x C_x| + |C_x A_x|$$

!

§29. Dönme : Bir $P \in \mathbb{D}$ noktası etrafında, bir $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ açısı kadar dönme



$$Dön_{P,\theta} : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D} \quad (\neq P)$$

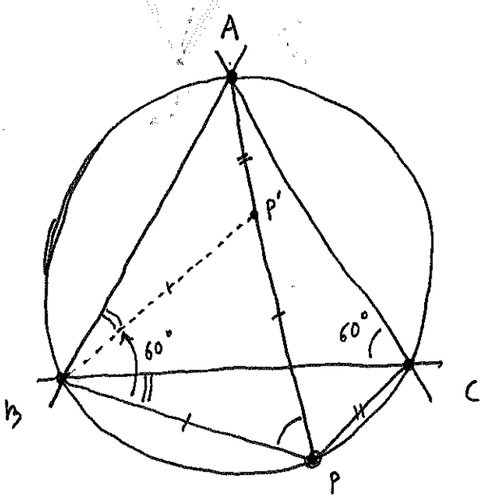
şeklinde bir fonksiyon olup, her $X \in \mathbb{D}$ için $X' = Dön_{P,\theta}(X)$ $|PX| = |PX'|$ ve $\measuredangle X'PX = \theta$ şartlarını sağlayan yegane nokta olarak belirlenir; $Dön_{P,\theta}(P) = P$ dir.

§29' Misal : Eşkenar üçgenlere dair... ABC eşkenar üçgeninde, P çevrel çember üzerinde B ve C yi birleştiren ve A yı içine almayan yay üzerindeyse, o zaman

$$|PA| = |PB| + |PC|$$

dir :

$$Dön_{B,\pi/3} : \begin{cases} B \longrightarrow B \\ C \longrightarrow A \\ P \longrightarrow P' \end{cases}$$

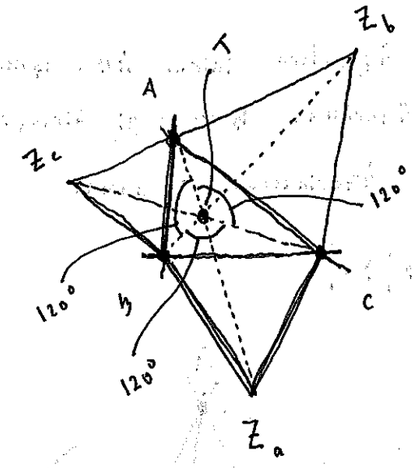


"öyle olunca!"

$$|PA| = |PP'| + |P'A| = |PB| + |PC|$$

$PBC \equiv P'BA$ olduğundan !

Evangelista Torricelli 1608/1647

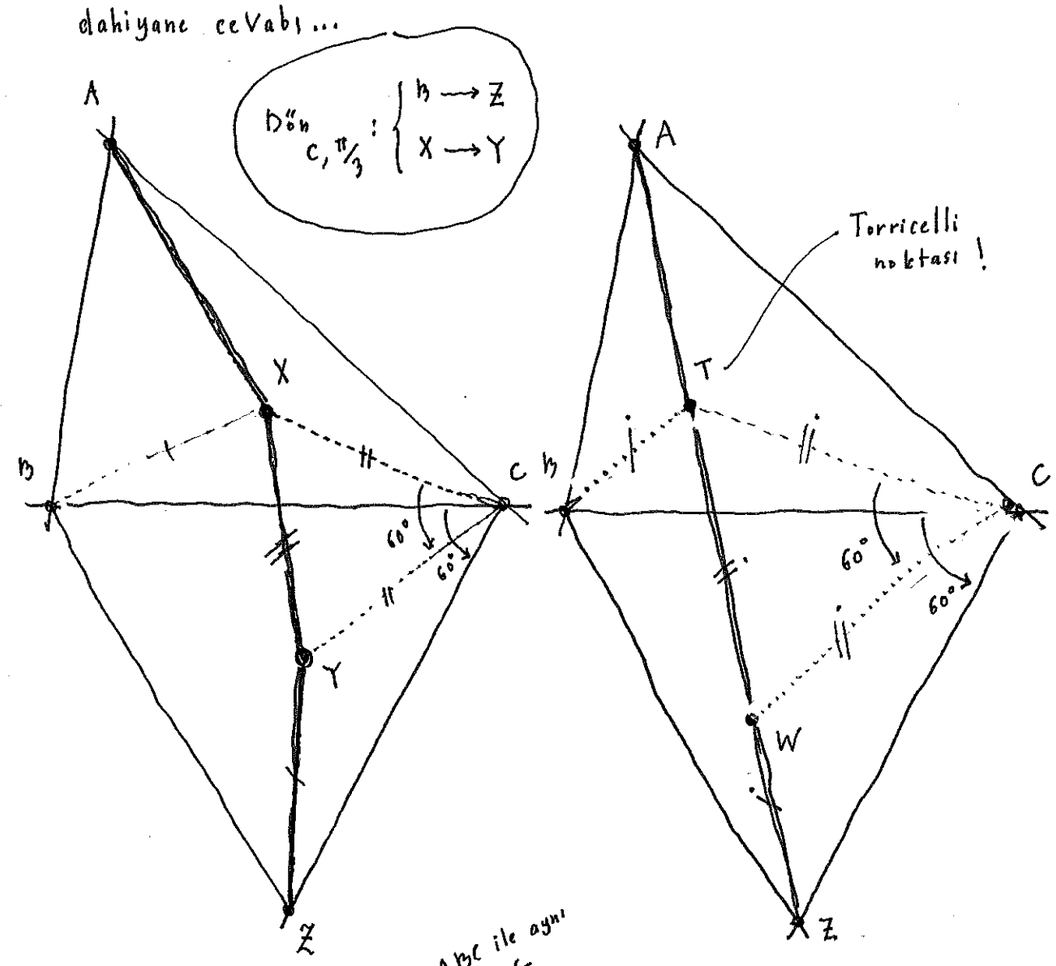


Her kenar üzerine ABC ile aynı yönde Z_aCB, Z_bAC, Z_cBA eşkenar üçgenleri kurulsun.

AZ_a, BZ_b, CZ_c doğruları noktadaş olup, ortak nokta Torricelli noktasıdır.

§29" Misal : "Fermat-Torricelli Problemi"

Açılarının hiç biri 120° yi geçmeyen bir ABC üçgeninde köşelere uzaklıkları toplamı en küçük olan nokta hangisidir? (Var mıdır?) Fermat'nın ortaya attığı bu suale E. Torricelli'nin dahiyane cevabı...

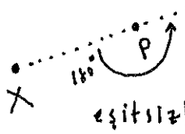


CBZ ve CXY birer eşkenar üçgendir. T ve W noktaları AZ üzerinde, CTW -gene ABC ile aynı yönde bir eşkenar üçgen olsun. Aranan nokta T ("Torricelli noktası") dir:

$$|XA|+|XB|+|XC| = |AX|+|XY|+|YZ| \geq |AZ| = |AT|+|TW|+|WZ| = |TA|+|TB|+|TC| \;!$$

§30. Mühim bir (özel) hal : "Yarı dönme" / ("half-turn")

P noktası etrafında, 180° / π^R kadar dönme, çok kullanılır, bu yüzden de kendine mahsus bir isimle anılır : "P etrafında yarı dönme".



Gösterim : $Yd_P = Dön_{P,\pi}$

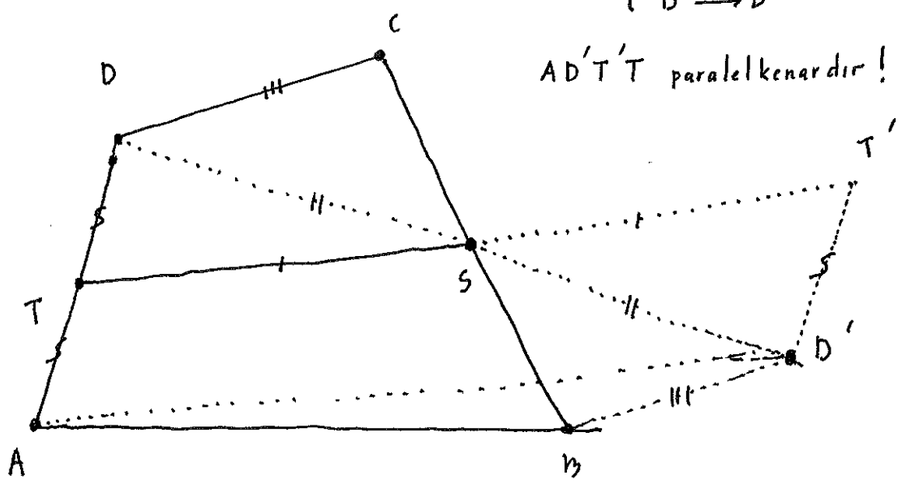
§30' Misal : Yarı dönme kullanarak, aşağıdaki zarif eşitsizlik ispatlanabilir...

Herhangi bir ABCD dörtgeninde, S ve T sırasıyla [B,C] ve [D,A] doğru parçalarının orta noktalarıysa, o zaman

$$2|ST| \leq |AB| + |CD|$$

olup, eşitlik ancak $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{DC}$ paralel ve aynı yönde olursa vakidir.

$$Yd_S : \begin{cases} C \longrightarrow B \\ T \longrightarrow T' \\ D \longrightarrow D' \end{cases}$$



AD'T'T paralelkenardır!

$$2|ST| = |TT'| = |AD'| \leq |AB| + |BD'| = |AB| + |CD| \quad !$$

§31. Bazı dönüşümlerin birleşimleri :

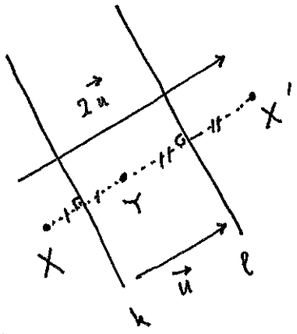
Dikkat edilirse, başlıkta anılan "Öklid geometrisine has dönüşümler" mefhumunun ne manaya geldiğini söylemedim, söylemeyeceğim de. Sadece bazı misaller verilecek. (Bilenler bu misallerin aslında – bu bahsin sonunda – olabilecek her "Öklid geometrisine has dönüşüm"ü içine aldığını biliyor! Ben de kısaca bahsedeceğim...)

(A) İki ötelemenin birleşimi zaten görüldü :

$$Öt_{\vec{u}} \circ Öt_{\vec{v}} = Öt_{\vec{u}+\vec{v}}$$

(B) İki yansıma: Eğer $k \parallel \ell$ ise,

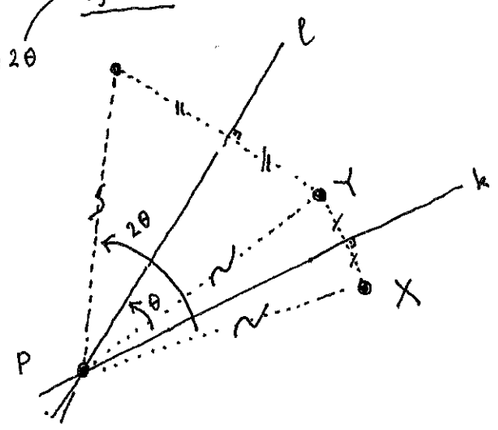
$$Yan_{\ell} \circ Yan_{k} = Öt_{2\vec{u}}$$

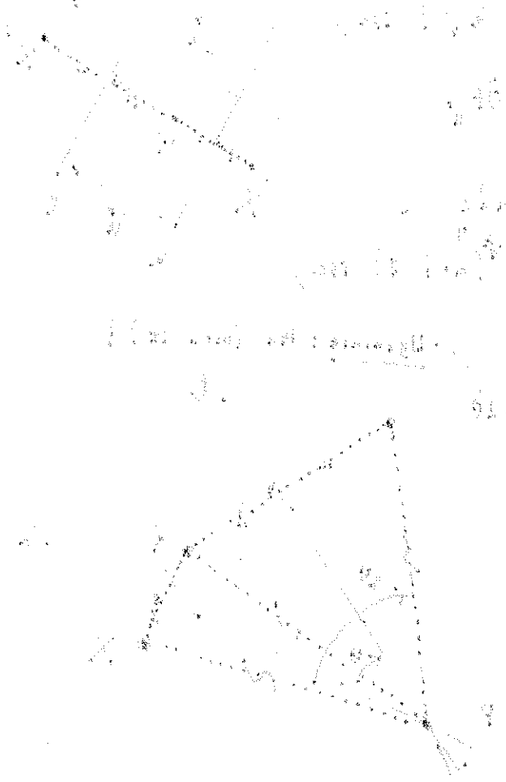


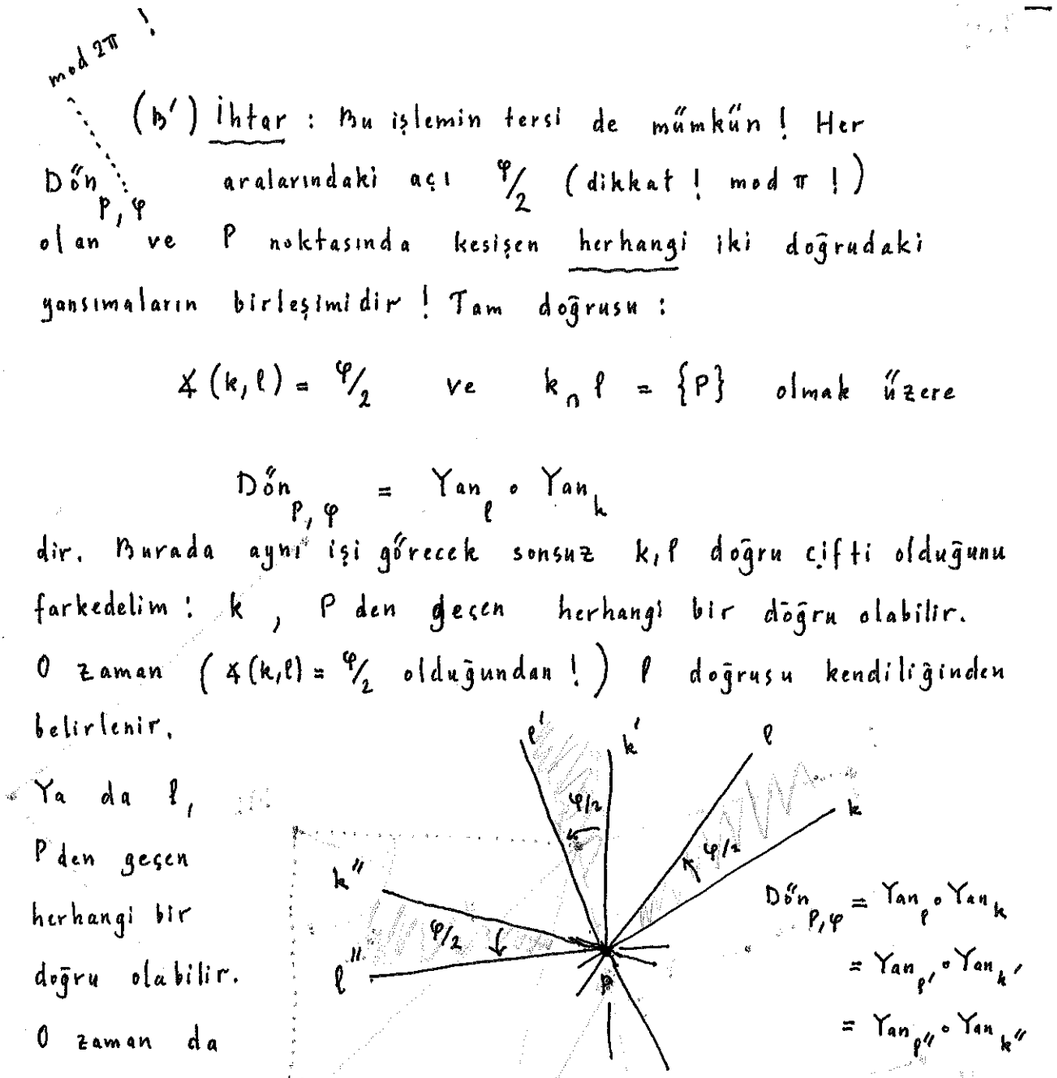
Eğer k ve ℓ bir P noktasında kesişiyorlar ve $\measuredangle(k,\ell) = \theta \pmod{\pi}$ ise,

$$Yan_{\ell} \circ Yan_{k} = Dön_{P,2\theta}$$

Uyarınız: $m\pi \pmod{2\pi}$!







(b') İhtar : Bu işlemin tersi de mümkün ! Her $\text{Dön}_{P,\varphi}$ aralarındaki açı $\varphi/2$ (dikkat ! mod π !) olan ve P noktasında kesişen herhangi iki doğrudaki yansımaların birleşimidir ! Tam doğrusu :

$$\measuredangle(k,l) = \varphi/2 \quad \text{ve} \quad k \cap l = \{P\} \quad \text{olmak üzere}$$

$$\text{Dön}_{P,\varphi} = \text{Yan}_l \circ \text{Yan}_k$$

dir. Burada aynı işi görecek sonsuz k,l doğru çifti olduğunu farkedelim : k , P den geçen herhangi bir doğru olabilir. O zaman ($\measuredangle(k,l) = \varphi/2$ olduğundan !) l doğrusu kendiliğinden belirlenir.

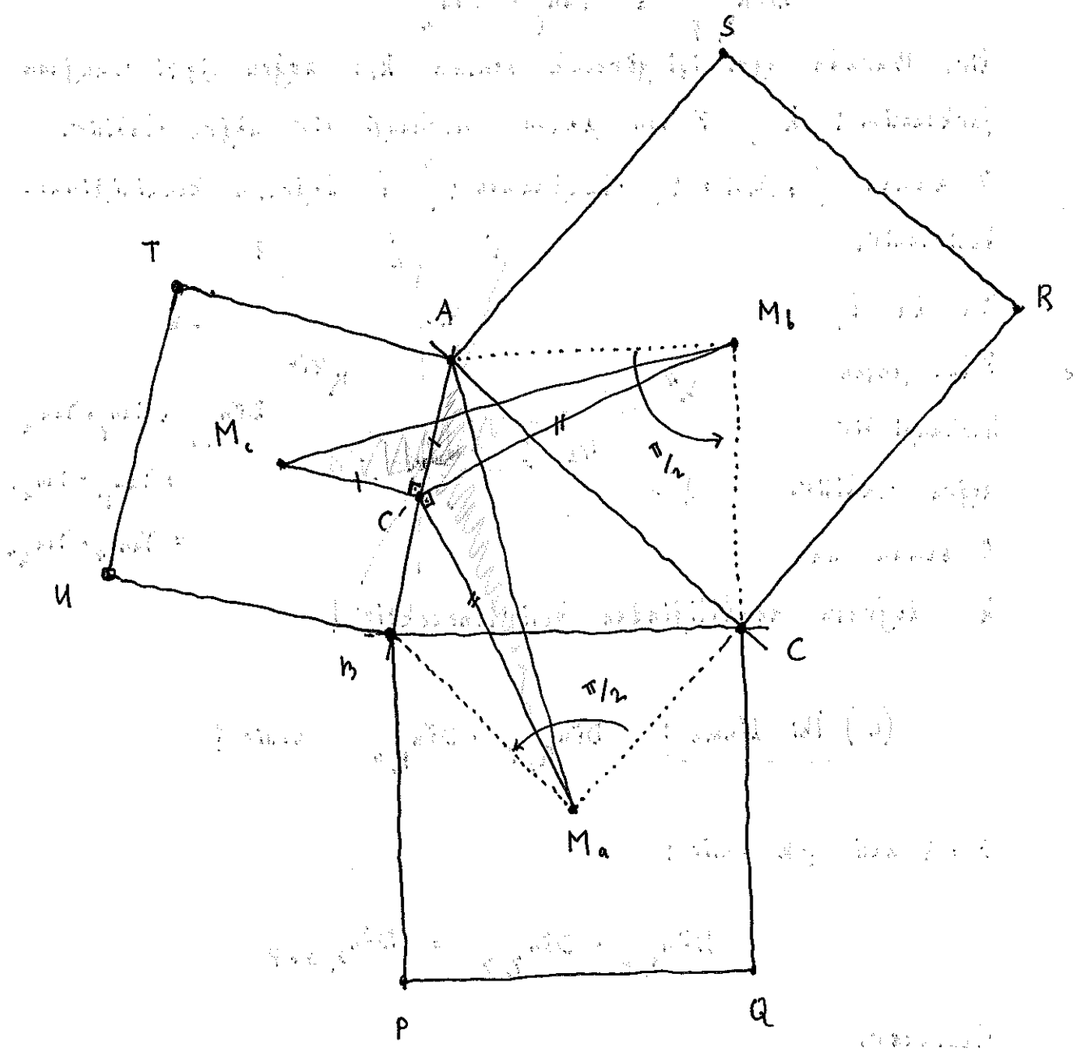
Ya da l, P den geçen herhangi bir doğru olabilir. O zaman da k doğrusu kendiliğinden belirlenecektir !

(c) İki dönme : $\text{Dön}_{Q,\varphi} \circ \text{Dön}_{P,\theta}$ nedir ?

P = Q hali çok basit :

$$\text{Dön}_{P,\varphi} \circ \text{Dön}_{P,\theta} = \text{Dön}_{P,\theta+\varphi}$$

olacaktır.



$P \neq Q$ halinde ise :

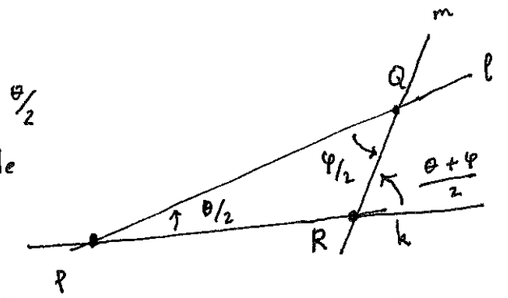
$l = PQ$ alalım ve $\measuredangle(k,l) = \theta/2$

$\measuredangle(l,m) = \varphi/2$ olacak şekilde

k ve m doğrularını

seçelim. O zaman $\measuredangle(k,m) = \frac{\theta+\varphi}{2}$ olup, $\theta+\varphi \neq 0 \pmod{2\pi}$ ise,

bunlar bir R noktasında kesişir!



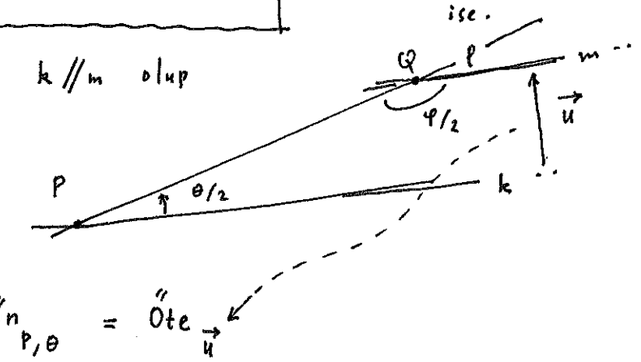
$$D\ddot{o}n_{Q,\varphi} \circ D\ddot{o}n_{P,\theta} = Yan_m \circ Yan_l \circ Yan_l \circ Yan_k = Yan_m \circ Yan_k$$

ve

$$\boxed{D\ddot{o}n_{Q,\varphi} \circ D\ddot{o}n_{P,\theta} = D\ddot{o}n_{R,\theta+\varphi}}$$

$P \neq Q$ ve eğer $\theta+\varphi \neq 0 \pmod{2\pi}$ ise.

$\theta+\varphi = 0 \pmod{2\pi}$ halinde $k \parallel m$ olup



$$D\ddot{o}n_{Q,\varphi} \circ D\ddot{o}n_{P,\theta} = \ddot{O}te_{\vec{u}}$$

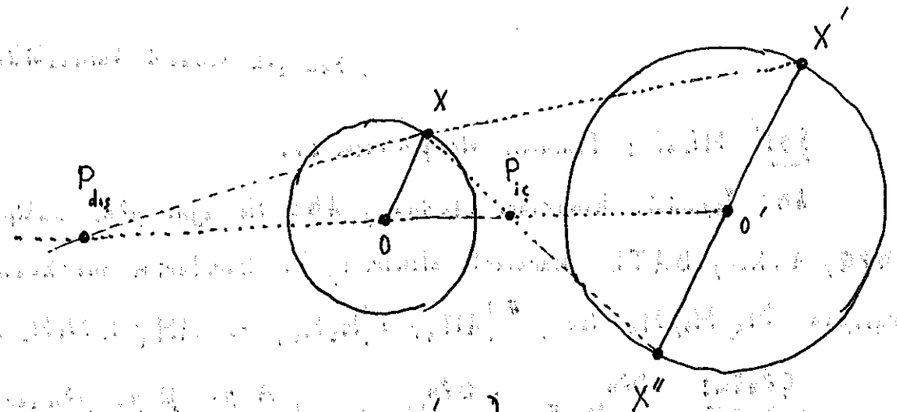
Pek çok benzeri bulunabilir!

§31' Misal : Tanınmış bir problem ...

ABC üçgeninin kenarları üzerinde, ABC ile aynı yöne sahip CBPQ, ACRS, BATU kareleri alınırsa, bu karelerin merkezleri sırasıyla M_a, M_b, M_c ise, $|AM_a| = |M_bM_c|$ ve $AM_a \perp M_bM_c$ dir

Çözüm: $D\ddot{o}n_{M_a,\pi/2} \circ D\ddot{o}n_{M_b,\pi/2}$, A yı B ye gönderen bir yarıdönmedir. Merkezi ancak C' olabilir. O zaman $C'M_aM_b$ bir ikizkenar dik üçgendir. Böylece

$$D\ddot{o}n_{C',\pi/2} : \begin{cases} M_a \longrightarrow M_b \\ A \longrightarrow M_c \end{cases} !$$

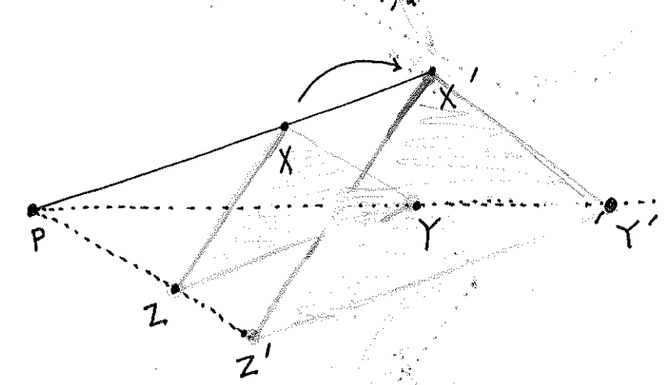


$$\left.\begin{aligned} P_{dış}O' : P_{dış}O &= R'/R \\ P_{iç}O' : P_{iç}O &= -R'/R \end{aligned}\right\} \text{— Tabii ki } (O, O'; P_{iç}, P_{dış}) = -1.$$

§32. **Homoteti** : Merkezi $P \in \mathbb{D}$ ve katsayısı $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$ olan homoteti

$$Hom_{P,\alpha} : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$$

şeklinde bir fonksiyon olup, herhangi bir $X \in \mathbb{D}$ için, $X' = Hom_{P,\alpha}(X)$ noktası PX doğrusu üzerindeki $PX' : PX = \alpha$ denklemini sağlayan yegane noktadır. Ayrıca $Hom_{P,\alpha}(P) = P$.



Vektörleri kullanarak : $\boxed{Hom_{P,\alpha}(X) = P + \alpha(X - P)}$

Homoteti, açıları korur, doğruları paralel doğrulara götürür.

Çemberler, çemberlere dönüşür : Kolaylık için merkezi O, yarıçapı R olan çemberi $Ç(O,R)$ ile gösterelim. Şunlar kolaylıkla görülebilir :

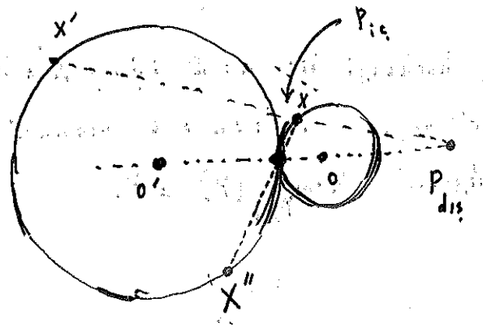
$$(A) \qquad Hom_{P,\alpha}\left(Ç(O,R)\right) = Ç\left(Hom_{P,\alpha}(O), |\alpha| R\right)$$

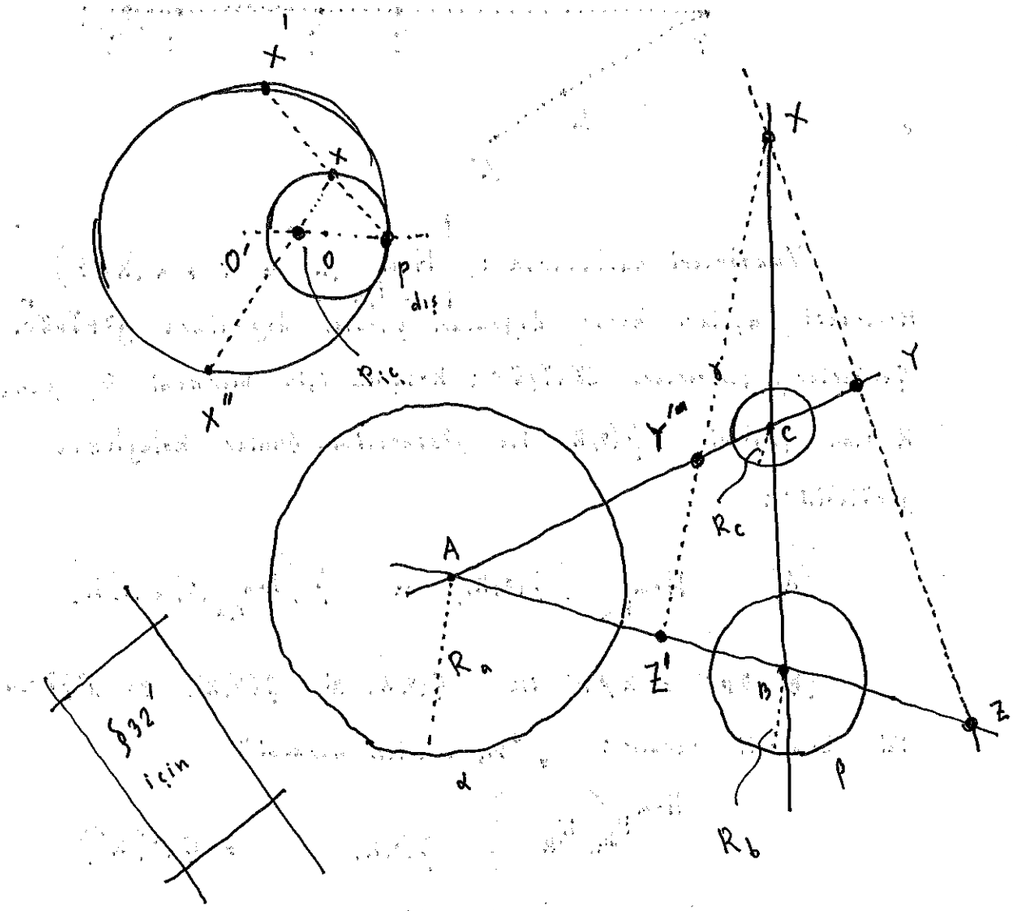
(B) $O \neq O'$ ve $R \neq R'$ ise $Ç(O,R)$ yi $Ç(O',R')$ ye götüren iki homoteti vardır : "Dış homoteti merkezi"

$$\left.\begin{aligned} &Hom_{P_{dış},\, R'/R} \\ &Hom_{P_{iç},\, -R'/R} \end{aligned}\right\} \quad Ç(O,R) \longrightarrow Ç(O',R')$$

"İ

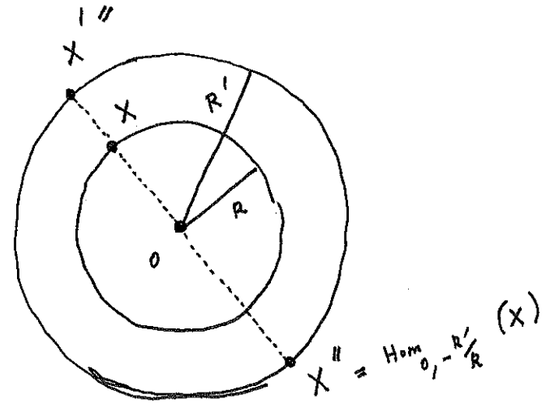
Göz alıştırması :



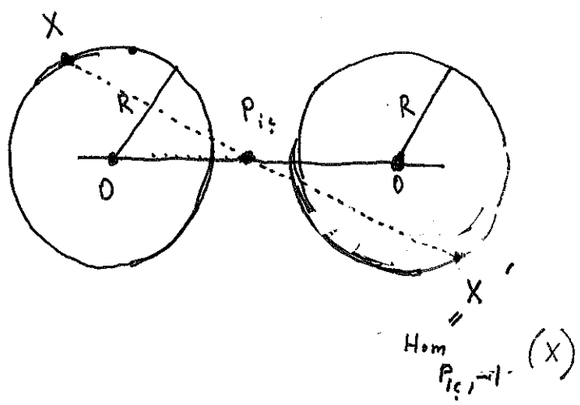


(B')

$O = O'$ halinde $P_{iç} = P_{dış} = 0$ olarak düşünülebilir :



(B'') $R = R'$ ve $O \neq O'$ halinde $P_{dış}$ yoktur. ("$P_{dış} = \infty$")
$P_{iç}$ ise $[O,O']$ doğru parçasının orta noktasıdır!



Misal:

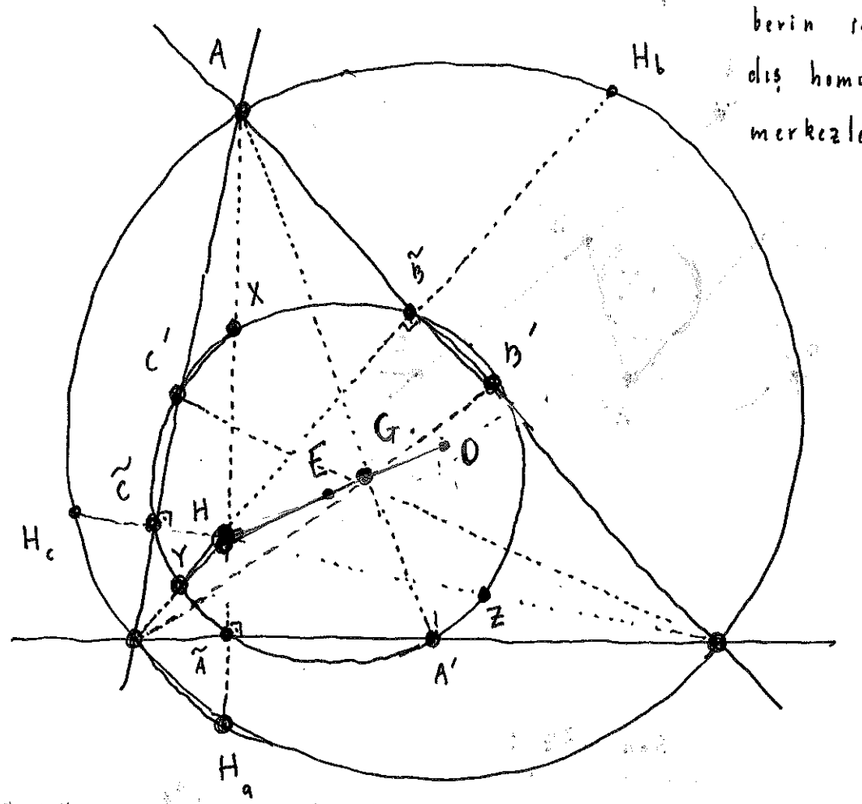
§32' Yarıçapları ve merkezleri farklı üç çemberin ikişer ikişer üç dış homoteti merkezi doğrudaştır!

Yarıçapları ve merkezleri farklı üç çemberden ikisinin dış, diğer ikisinin iç homoteti merkezi doğrudaştır!

$$\frac{XB}{XC}\,\frac{YC}{YA}\,\frac{ZA}{ZB} = \left(\frac{R_b}{R_c}\right)\left(\frac{R_c}{R_a}\right)\left(\frac{R_a}{R_b}\right) = +1$$

$$\frac{XB}{XC}\,\frac{Y'C}{Y'A}\,\frac{Z'A}{Z'B} = \left(\frac{R_b}{R_c}\right)\left(-\frac{R_c}{R_a}\right)\left(-\frac{R_a}{R_b}\right) = +1$$

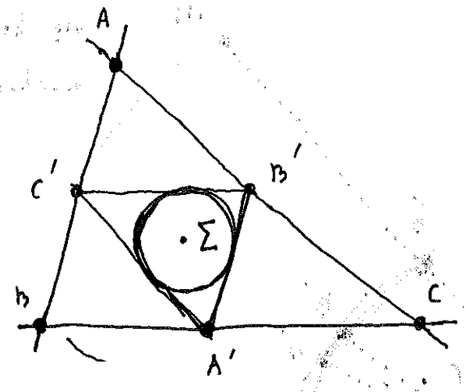
§32". Misal: 9 nokta çemberi en iyi homotetiler vasıtasıyla anlaşılabilir: G ve H, 9-nokta çemberi ve çevrel çemberin iç ve dış homoteti merkezleridir...



$$\text{Hom}_{G,-\frac{1}{2}}: \begin{cases} A \longrightarrow A' \\ B \longrightarrow B' \\ C \longrightarrow C' \end{cases} \qquad \text{Ihtar:} \begin{cases} G_a \longrightarrow A \\ G_b \longrightarrow B \\ G_c \longrightarrow C \end{cases}$$

$$\text{Hom}_{H,\frac{1}{2}}: \begin{cases} H_a \longrightarrow \tilde{A} \\ H_b \longrightarrow \tilde{B} \\ H_c \longrightarrow \tilde{C} \end{cases} \quad \& \quad \begin{cases} A \longrightarrow X \\ B \longrightarrow Y \\ C \longrightarrow Z \end{cases}$$

Theodor Spieker (1823/1913)

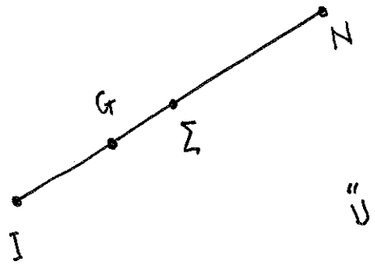


Son Söz :

Burada gelişigüzel bir yığın görünüşünde sunulan dönüşümler aslında Öklid geometrisine has dönüşümlerin tamamıdır ! (Bu dönüşümler burada bahsettiğimiz dönüşümler tarafından üretilen bir grup teşkil ederler !

§ 32''' Misal : Spieker noktası $[I,N]$ doğru parçasının orta noktasıdır. (Yaygın gösterim Σ !)

Eşdeğer bir deyişle, $(I, \Sigma ; G, N)$ bir harmonik dörtlüdür... Yani Σ I nin G, N ye göre harmonik eşleniğidir.

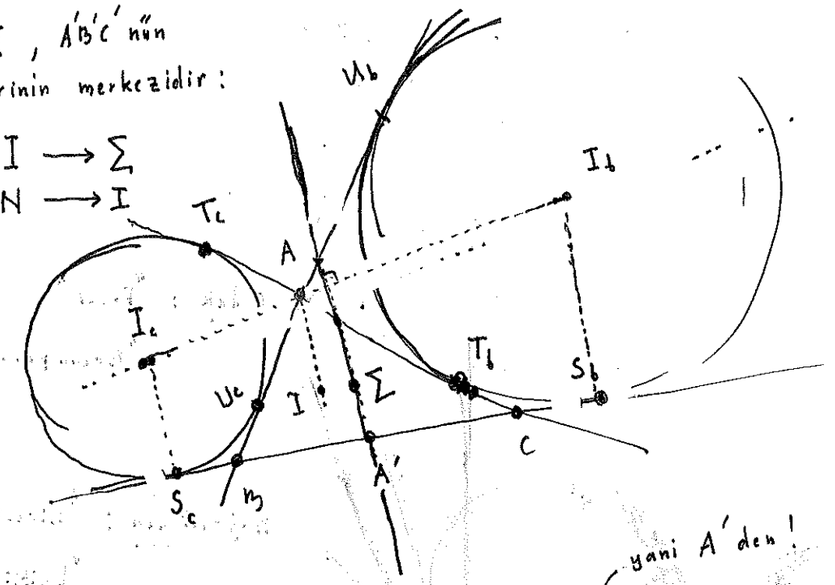


Üç ~~İki~~ beklenmedik belirleme :

(A) Σ üç dışteğet çemberin kuvvet merkezidir :

(A') Σ , A'B'C' nün içteğet çemberinin merkezidir :

Hom$_{G,-1/2}$: $I \longrightarrow \Sigma$
$N \longrightarrow I$



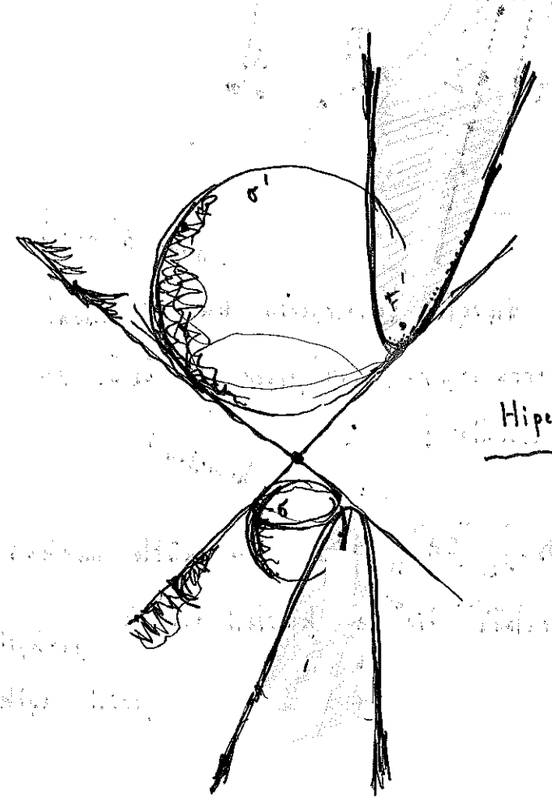
Ua ve C nin karşısındaki dışteğet çemberlerin kuvvet ekseni yani A'den ! $[S_c S_b]$ doğru parçasının orta noktasından geçer ve $I_b I_c$ ye dik olup, AI ye paraleldir !

(Ua) Σ , $[BC]_1 [CA]_1 [AB]$ homojen ! nin kütle merkezidir :

[BC] kenarlarını A'
[CA] sırasıyla B'
[AB] C'

bir er a kütlesi olarak
b
c
yerleştirelim.

Gerisi aşikar !



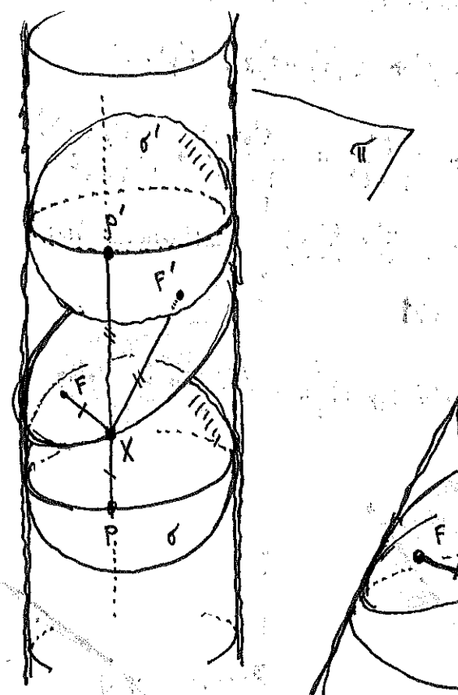
Odak : "Focus"
"Brennpunkt"

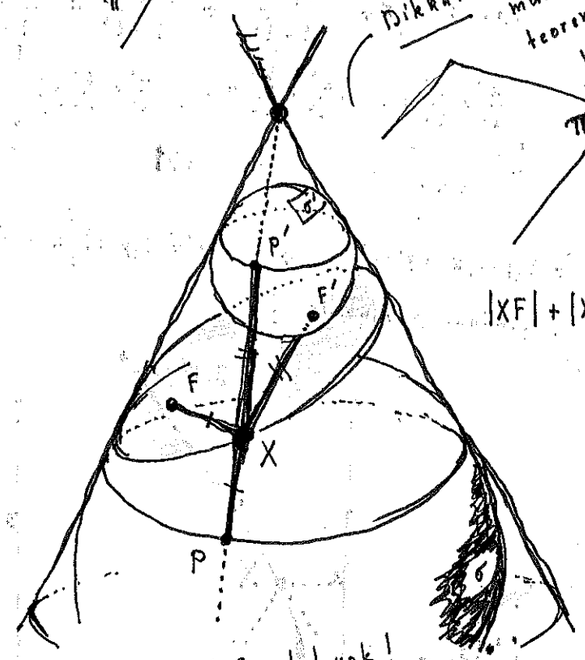
Doğrultman : "Directrix"
"Leitlinie"

Hiperbol !

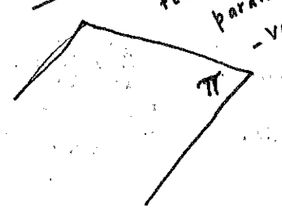
D. Koni Kesitleri :

§ 33. Bir düzlem bir koniyi kesince ortaya çıkan eğriler ≡ "koni kesitleri"





Dikkat ! Bu bir mutlak geometri teoremidir ! Yani paralellik aksiyomu -ve eşdeğerleri- kullanılmıyor !



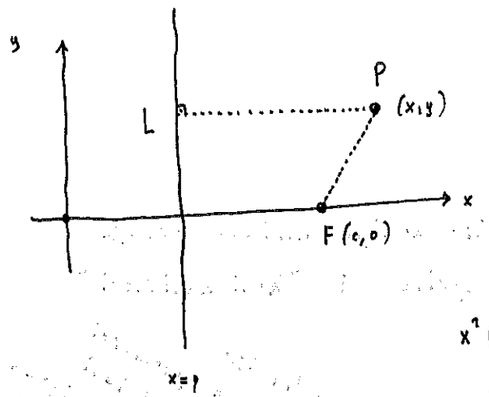
$|XF| + |XF'| = |XP| + |XP'|$
$= |PP'|$
$= sabit$
(X ten müstakil...)

Bileşler için ! - Parabol yok !

1. Belirleme : Düzlem π koniyi v tepesinin sadece bir tarafında kessin, koninin üreteçlerinde hiç birisine paralel olmasın.

Odakları F, F' & "büyük çapı" 2a olan "elips" / "hiperbol" $= \{ X \in \mathbb{D} \mid |XF| + |XF'| = 2a \;\; / \;\; ||XF| - |XF'|| = 2a \}$

Koni Kesitlerinin Analitik Geometrisi : $(\mathbb{D} \sim \mathbb{R}^2)$



$\varepsilon > 0$ alalım ...

$$\frac{|PF|}{|PL|} = \varepsilon \;:\; (x-c)^2 + y^2 = \varepsilon^2 (x-p)^2$$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = \varepsilon^2 (x^2 - 2px + p^2)$$

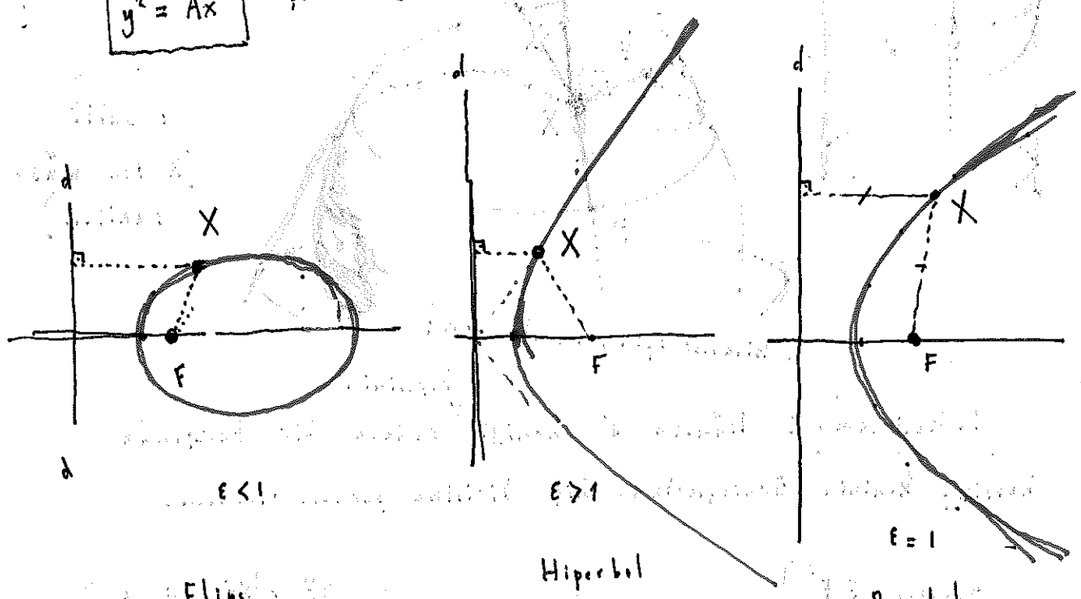
$$x^2(1-\varepsilon^2) + y^2 + 2(\varepsilon^2 p - c)x = \varepsilon^2 p^2 - c^2$$

$$\varepsilon \neq 1 \;:\; \left(x + \frac{\varepsilon^2 p - c}{1-\varepsilon^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1-\varepsilon^2} = \frac{\varepsilon^2 p^2 - c^2}{1-\varepsilon^2} + \left(\frac{\varepsilon^2 p - c}{1-\varepsilon^2}\right)^2$$

bu denklem $\underbrace{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}_{\varepsilon < 1}$, $\underbrace{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}_{\varepsilon > 1}$ şekillerinden birine sokulabilir.

$\varepsilon = 1$ ise : $y^2 + 2(p-c)x = p^2 - c^2 \longrightarrow y^2 + 2(p-c)\left[x - \frac{p+c}{2}\right] = 0$ olup

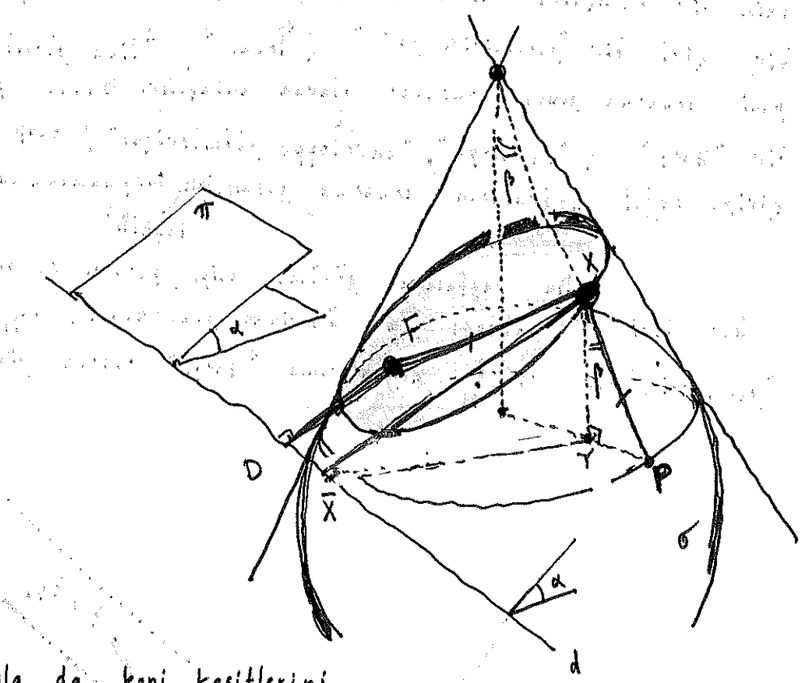
$y^2 = Ax$ şeklinde yazılabilir !



d doğrusu π düzlemi ile σ nın koniye boyunca değdiği çemberin düzlemi nin kesişimi ...

2. Belirleme : Şu görülüyor :

$$\frac{|XF|}{|X\bar{X}|} = \frac{|XP|}{|X\bar{X}|} = \frac{|XY|/\cos\beta}{|XY|/\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\beta} = \text{sabit} \ldots$$



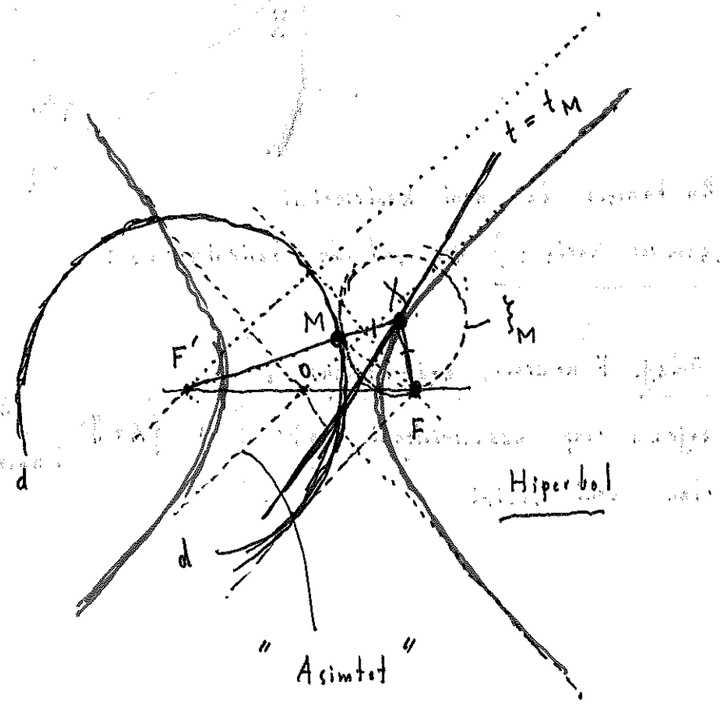
Bu bakışla da koni kesitlerini (çember hariç !) şu şekilde belirliyoruz :

$$\left.\begin{array}{l}\text{Odağı F noktası, doğrultmanı d} \\ \text{doğrusu olup eksantrisitesi } \varepsilon > 0 \\ \text{olan koni kesiti}\end{array}\right\} = \left\{X \in \mathbb{D} \;\middle|\; \frac{|XF|}{\text{uzak}(X,d)} = \varepsilon\right\} \rightarrow \begin{cases}\varepsilon < 1 & \text{"Elips"} \\ \varepsilon = 1 & \text{"parabol"} \\ \varepsilon > 1 & \text{"hiperbol"}\end{cases}$$

Düalite "çevriklik" bahsinde :

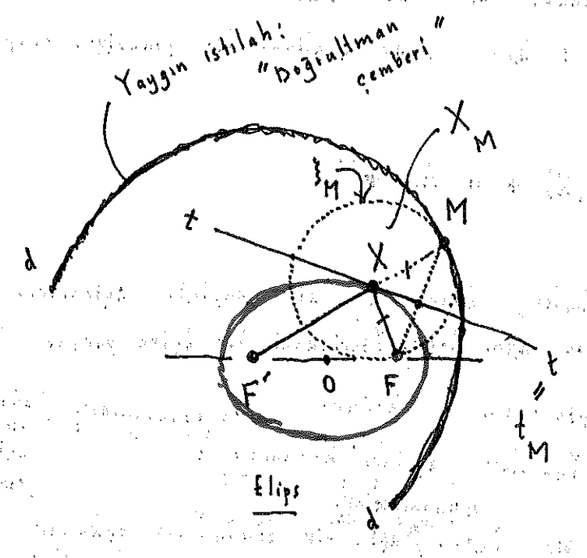
Geometride - çağdaş matematik dili çerçevesi dahilinde - eğrilere birer noktalar kümesi olarak anlıyoruz. Bu dar ve akim bir bakıştır. "Köklü" mazide olan âtî" olarak geometride ise bir eğri bir "geometrik yer" ("locus", "lieu géométrique") yani ardarda gelen noktalar olarak anlaşılır. Bunun çevriği ise bir "zarf" ("envelope", "envoloppe géométrique") olup bir eğrinin eğrige teğet doğruların ardarda gelmesiyle teşkili mefhumundan ibarettir.

Bu sayfalarda görülen elips, parabol ve hiperbolün her biri (M noktası d üzerinde gezerken!) X_M noktasının "geometrik yeri" ve t_M doğrularının "zarfı" olarak görülmelidir!



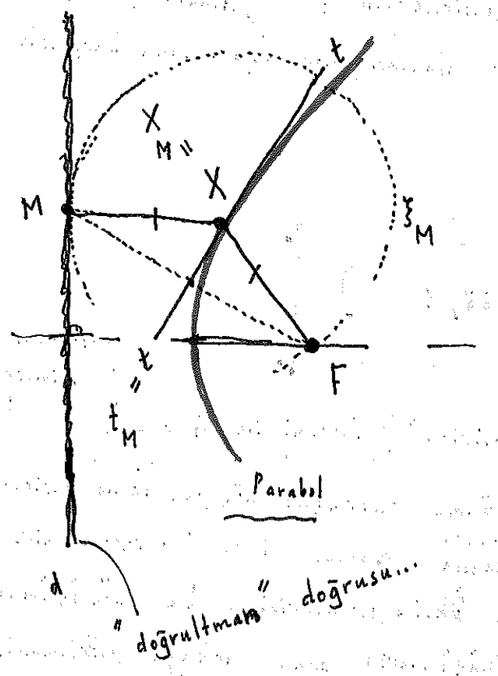
Hiperbol

3. Belirleme : (Aslında 2. nin bir tekrarı !)



Elips

Yarıçapı 2a ve merkezi F' olan bir d çemberi ve çember dahilinde bir F noktası verildiğinde, F den geçen ve d ye teğet olan çemberlerinin merkezleri nin geometrik yeri odakları F, F' ve büyük çapı 2a olan elipstir.



Parabol

Benzer şekilde bir d doğrusu ve bir F ∉ d noktası verildiğinde F den geçen ve d ye teğet olan çemberlerin merkezlerinin geometrik yeri doğrultmanı d ve odağı F olan paraboldür.

$\begin{cases} A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} & \text{singüler olmayan bir matris} \\ V = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} & \text{herhangi bir vektör} \end{cases}$ olmak üzere

Öklid geometrisine ait olmayan bir dönüşüm : Afin Dönüşümler

Gene analitik geometri ruhunda $\mathbb{D} \sim \mathbb{R}^2$ alalım. $\mathbb{D}$ üzerinde $\varphi = \varphi_{A,V}$ afin dönüşümü, $\varphi : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ şeklinde bir fonksiyon olup her $X \in \mathbb{D} \sim \mathbb{R}^2$ için

$$\varphi(X) = AX + V$$

denklemiyle verilir.

Afin dönüşümler, doğruları, doğrudaşlığı, doğruların paralelliğini, bir doğrudaki bir noktanın aynı doğru üzerindeki bir doğru parçasını böldüğü nisbeti - ve böylece eşlek oranı - korur.

Afin dönüşümler açıları korumaz ve uzunlukları (düzlemde bir birim doğru parçası seçilmiş ise!) :

** | Herhangi bir üçgen, afin bir dönüşümle eşkenar bir üçgen haline getirilebilir !

Afin dönüşümler alanları korumaz. Alanlar $|\det A|$ ile çarpılır! Buna karşılık alanların oranlarını korur.

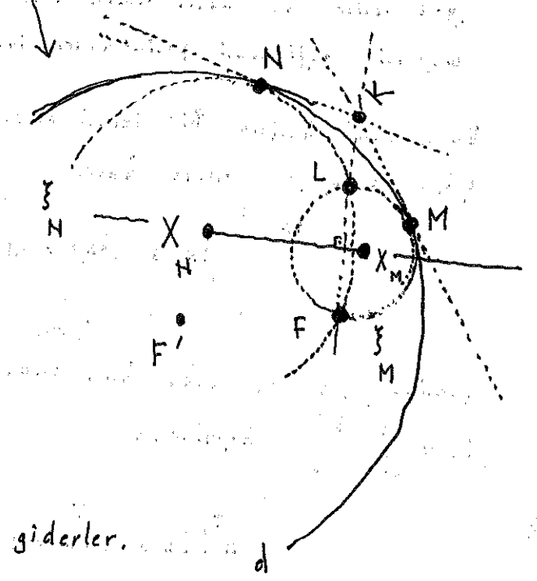
Jean-Victor Poncelet (1788/1867)

İhtar! | Cauchy ("polar decomposition") Teoremi ile $A = U \cdot S$ (U: ortogonal, S: simetrik pozitif) yazılabilir. S yi de bir dönme vasıtasiyle köşegen haale getirebiliriz. Böylece $A = U \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} V$ olur. Burada U ve V ortogonal dir. Demek ki afin bir dönüşüm Öklid geometrisine has dönüşümlerin ve $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \lambda x \\ \mu y \end{bmatrix}$ şeklinde dönüşümlerin arka arkaya getirilmesiyle oluşur. ("scaling" : ölçek değiştirici dönüşümler...) $\lambda, \mu > 0$!

§ 34. Koni kesitlerinde teğetler :

Yukarıdaki sunumun gösterimiyle, $t = t_M$ doğrusu daim X_M noktasındaki teğettir !

Elips için. Diğer haller benzer şekilde...



M ve N deki teğetler K de kesişsin. K, d, ξ_M, ξ_N nin kuvvet merkezi olup F, L, K doğrudaştır.

$X_N X_N$ doğrusu $[F, L]$ nin ortadikmesidir. $N \longrightarrow M$ veya $X_N \longrightarrow X_M$ iken M, N, K, L noktaları M ye giderler.

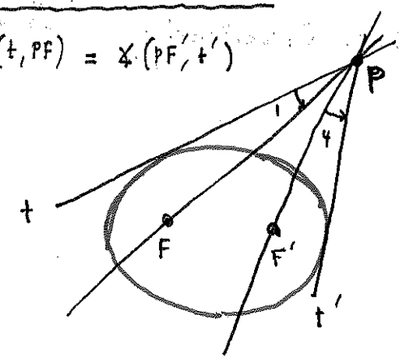
O zaman da $X_M X_N$ kirişi $[F, M]$ nin orta dikmesine gider !

§ 35. Poncelet teoremleri : t, t' teğetleri P de kesişsin.

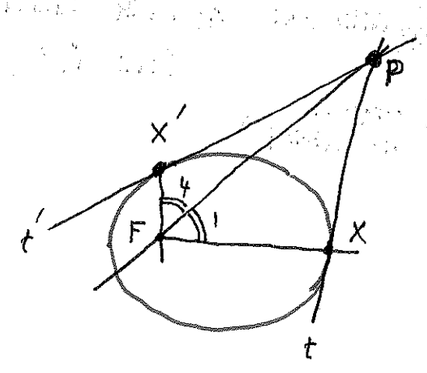
İkinci Poncelet Teoremi : Teğetlerin değme noktaları X, X' olsun

İkinci Poncelet Teoremi :

$\measuredangle(t, PF) = \measuredangle(PF', t')$



$\measuredangle(FX, FP) = \measuredangle(FP, FX')$



İkinci Dereceden İki Bilinmeyenli Çoklukların Konik Kesitleriyle Alakası

Analitik geometri açısından, konik kesitlerinin incelenmesi (yoz haller de dahil olmak üzere !) ikinci dereceden iki değişkenli polinomların incelenmesine denktir !

En şumullü haliyle bir ikinci dereceden iki bilinmeyenli polinom $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ olmak üzere

$$\underbrace{ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f}_{Q(x,y)} = 0 \qquad (*)$$

oku yazmayalım

şeklinde, ya da daha kısa olsun diye $\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $\vec{h} = \begin{bmatrix} d \\ e \end{bmatrix}$ ve $M = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ koyularak

bakışık ve sıfırdan farklı !

$$x^T M x + 2h^T x + f = 0 \qquad (1)$$

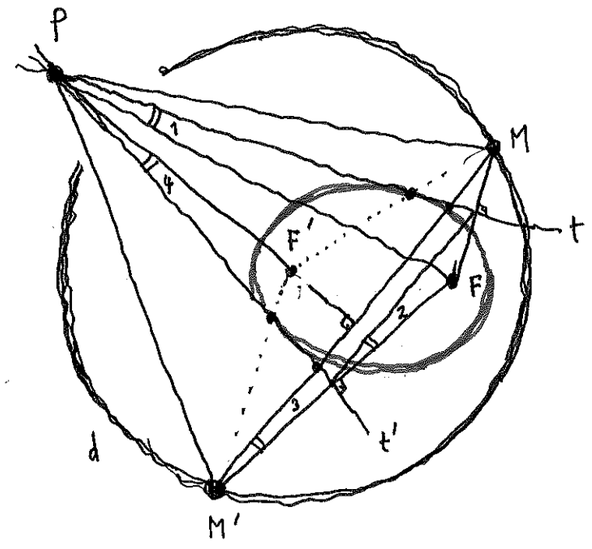
şeklinde yazılır. Tabii (*) ifadesi analitik geometride "eğri"sine $\{(x,y) \in \mathbb{D} \cong \mathbb{R}^2 \mid Q(x,y) = 0\}$ kümesine karşılık gelir.

M bakışık olduğundan (yani $M^T = M$ olduğundan !) $\mathbb{D} \cong \mathbb{R}^2$ (vektör uzayı olarak) nin ortonormal bir tabanını teşkil eden $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ ve $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ bulunabilir ki $MU = U\Delta$, $\Delta = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$ dır.

(Yani $\vec{u}, \vec{v}$, M'nin "özvektörleri" !)

(yani $U = [\vec{u}, \vec{v}]$ ortogonal bir matris !)

§34'. Birinci Poncelet teoreminin ispatı :



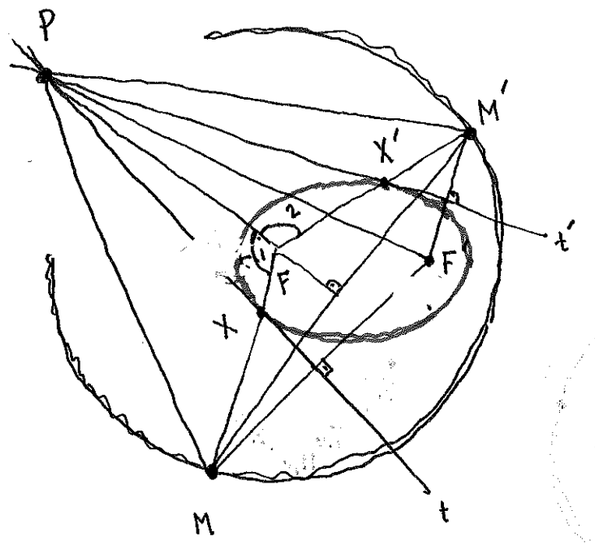
$|PM| = |PF| = |PM'|$ olduğundan

$PF' \perp MM'$ olur ve

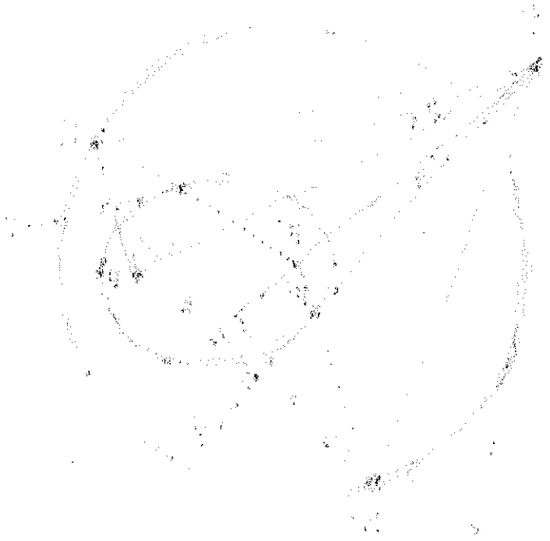
$\measuredangle(t, PF) = 1 = 2 = 3 = \measuredangle 4$

$= \measuredangle(PF', t')$!

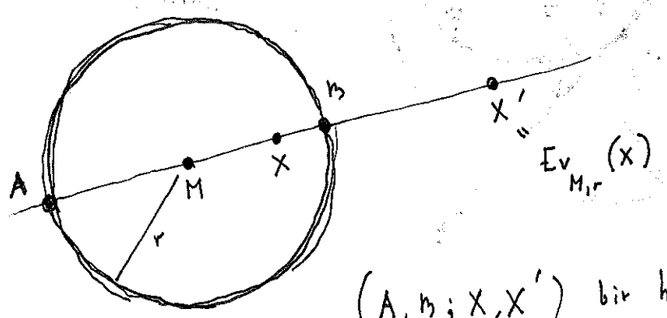
§34". İkinci Poncelet teoreminin ispatı :



Burada da PF nin $[MM']$ nün ortadikmesi olduğunu görmek yeter !



Dikkat :



$(A, B; X, X')$ bir harmonik dörtlüdür...

!*

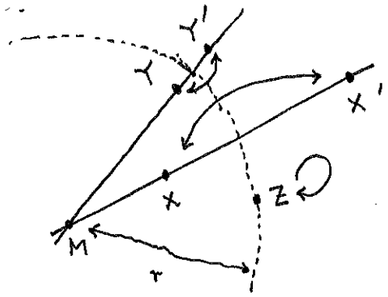
"Öklid geometrisine has olmayan bir dönüşüm..."

E. Evirtim : (عکس , inversion)

§35. Merkezi $M \in \mathbb{D}$ ve kuvveti $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$ olan (katsayısı) evirtim

$$Ev_{M,\alpha} : \mathbb{D} - \{M\} \longrightarrow \mathbb{D} - \{M\}$$

şeklinde bir fonksiyon olup, herhangi bir $X \in \mathbb{D}$ için, $X' = Ev_{M,\alpha}(X)$ M, X, X' noktaları doğrudaş olup, $MX \cdot MX' = \alpha$ denklemini sağlayan tek nokta olarak tarif edilir.



Hemen : (1) $X' = Ev_{M,\alpha}(X)$ ise $X = Ev_{M,\alpha}(X')$ ("involutive") dür. (2) Ananevî olarak - hem de sezgiye çok yarayan bir anane - M noktasını $\mathbb{D}$ den çıkartmak yerine, $\mathbb{D}$ ye yeni bir nokta "sonsuzdaki nokta" ∞ ilave etmek yani

$$Ev_{M,\alpha} : \mathbb{D}_\cup\{\infty\} \longrightarrow \mathbb{D}_\cup\{\infty\}$$

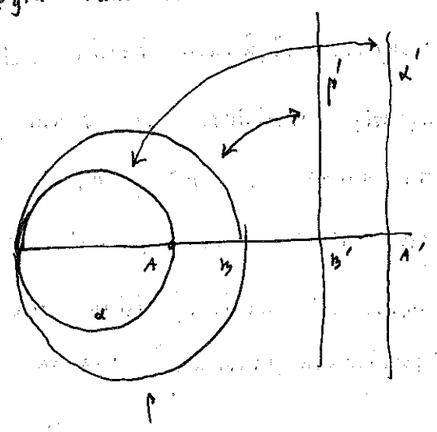
alıp

$$Ev_{M,\alpha}(M) = \infty \quad \& \quad Ev_{M,\alpha}(\infty) = M$$

olduğunu düşünmek tercih edilir. (3) α hem pozitif hem de negatif olabilirse de α nın pozitif olması çoğu zaman daha iyidir. Bu halde $\alpha = r^2$, $r > 0$ alınırsa $Ev_{M,\alpha}$, merkezi M, yarıçapı $r > 0$ olan çemberin içini (M dahil!) dışına çıkarır, dışını (∞ dahil!) içine sokar. Böyleee evirtim bir çeşit "çemberden yansıma" olarak düşünülebilir! Ev_{M,r^2} de M merkezli ve r yarıçaplı "çembere göre evirtim" olarak anılır!

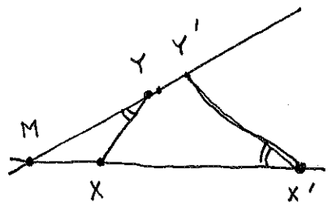
İhtar : "doğrudaş ya da çemberdeş" ibaresi incelediğimiz suallerin yeni bir geometriye içinde, doğruların da bir çeşit "sonsuzdan geçen" çember addolunacağı yeni bir geometriye gebe olduğunu işaret ediyor !

!! * İhtar : Teoremin b kısmı, ~~M~~ M den geçen bir çemberin evriğinin nasıl çizileceğini tam olarak tasvir ediyor. Ayrıca M de birbirine teğet iki çemberin evriklerinin de, M den geçmeyen iki paralel doğru olduğu da görülüyor ! Böylece, iki paralel doğruyu "sonsuzda teğet" iki çember olarak düşünebiliriz !



§ 96. Evirtimin çember ve doğrular üzerine tesiri :

Yardımcı teorem : $\varphi = Ev_{M,\alpha}$ ve $X' = \varphi(X)$, $Y' = \varphi(Y)$ ise (kısaca, X', Y', verilen bir evirtime göre sırasıyla X, Y nin evrikleri ise ...) X, Y, X', Y' çemberdeş ya da doğrudaştır.



(Bu dört noktadan bazıları M veya ∞ olabilir mi ?)

İspat : MXY', MY'X e benzerdir.

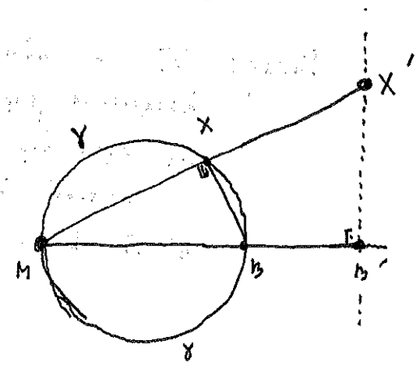
Teorem : $\varphi = Ev_{M,\alpha}$ verilmiş olsun. Bu dönüşüm altında şunlar olur:

(A) M den geçen bir doğru, gene M den geçen bir doğruya dönüşür.

(B) M den geçen bir çember, M den geçmeyen bir çembere dönüşür. (Demek ki : M den geçmeyen bir doğru, M den geçen bir çembere dönüşür.)

(C) M den geçmeyen bir çember, gene M den geçmeyen bir çembere dönüşür.

İspat : (A) aşikar. (B) M den geçen $[M, B]$ çaplı bir γ çemberi olsun. B nin evriği B' olsun. γ üzerinde ki her $X \neq M$ noktası için, X in evriği X', B' den MB ye çıkılan dik üzerindedir ! (Yardımcı teorem...)

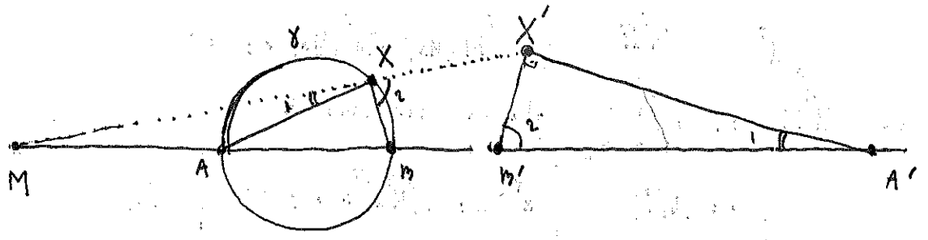


İhtar: 1) γ ve γ' nün merkezleri ($\alpha<0$) evrik noktalar değildir!

2) Evirtim katsayısı $\alpha>0$ ise, γ ve γ' nün ortak (iç) dış teğetleri M den geçer. Böylece M aynı zamanda γ ve γ' nün dış (iç) homoteti merkezi olmalıdır.

3) Teğet çemberler, teğet çemberlere dönüşür!

İhtar: B', C', D' nün doğrudaşlığı homoteti kullanılarak kolaylıkla görülebilir. C' noktası γ' ve δ' nün (iç veya dış, bilmiyoruz) bir homoteti merkezidir. C' merkezli bir homoteti δ' yü δ' ne gönderirken B' nü D' ne, β' nü α' ne gönderecektir!

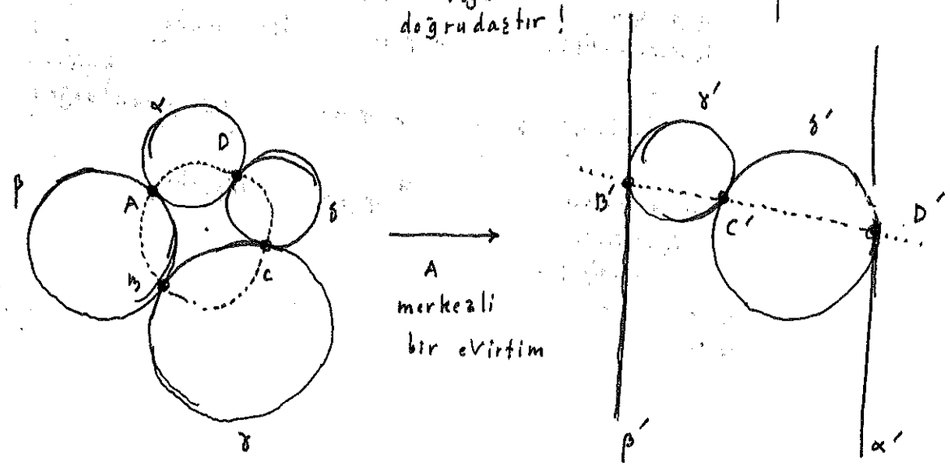


(c) γ, M den geçmeyen bir çember olsun. γ nın M den geçen çapı $[A,B]$ olsun. A', B' sırasıyla A, B nin evrikleri olsun. Herhangi $X \in \gamma$ $(X \neq A,B)$ için, X in evriği X' ise $X'B' \perp X'A'$ olup, $(1+2=90^\circ!)$ X' noktası $[A',B']$ çaplı çember üzerindedir... Böylece, γ nın evriği $[A'B']$ çaplı çember olmalıdır.

§37

Misal: Evirtim en safdilane bir şekilde öncelikle içinde çok çember olan dokuları basitleştirmek için kullanılır:

Mesela: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ çemberlerinin ilk üçü bir sonrakine, sonuncusu da ilkine değdikleri sırasıyla A, B, C, D noktaları çemberdeş veya doğrudaştır!



Şimdi bütün yapılması gereken B', C', D' nün doğrudaş olduğunu göstermekten ibarettir!

Böylece $x \longrightarrow U^{-1}x$ dönmesi altında eğri

$$(Ux)^T M(Ux) + 2h^T(Ux) + f = 0$$

$= U^T$

ya da $U^{-1}MU = \Delta = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$ olduğu hatırlanarak

$= \langle h, \vec{u} \rangle$

$$\boxed{x^T\Delta x + 2(U^T h)^T x + f = 0} \qquad (2)$$

yani $U^T h = \begin{bmatrix} d' \\ e' \end{bmatrix}$ de alarak

$= \langle h, \vec{v} \rangle$

$$\boxed{\lambda x^2 + \mu y^2 + 2d'x + 2e'y + f = 0} \qquad (2')$$

şekline girer.

$\lambda, \mu \neq 0$!

$\det M \neq 0$ hali: $x \longrightarrow x + w$ ötelemesi altında (1)

$$x^T\Delta x + 2\left(-w^T\Delta + h^T U\right)x + w^T\Delta w - 2(U^{-1}h)^T w + f = 0$$

ve $w = \Delta^{-1}U^{-1}h$ seçilerek

$$x^T\Delta x - h^T M^{-1} h + f = 0$$

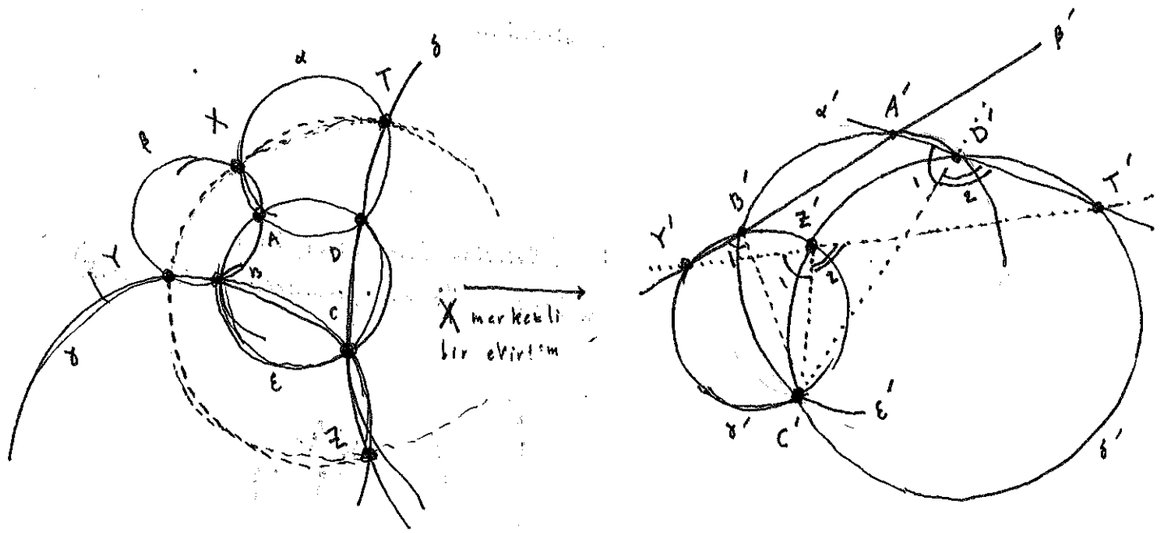
ya da

$$\lambda x^2 + \mu y^2 = \underbrace{h^T M h}_{\tau} - f \quad \text{haline gelir.}$$

Tasnif:

- $\det M > 0$: (λ, μ aynı işarete sahip!)
  - $\lambda\tau > 0$ → elips
  - $\lambda\tau < 0$ → boş küme
  - $\tau = 0$ → bir nokta
- $\det M < 0$: (λ, μ farklı işaretlere sahip!)
  - $\tau = 0$ → iki farklı kesişen doğru
  - $\tau \neq 0$ → hiperbol

§37'. Benzer bir misal: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ çemberlerinin ilk üçü bir sonrakini ve sonuncusu ilkini sırasıyla A ve X, B ve Y, C ve Z, D ve T noktalarında kessin. A, B, C, D çemberdeş (veya doğrudaş) ise, X, Y, Z, T de çemberdeş (veya doğrudaş) olur:



doğrudaş: Şimdi yapılması gereken sadece ..., T''nün ... olduklarını görmekten ibarettir. (Y', Z', T''nün) 0 da $1+2 = 180°$ olduğuna denktir!

Batlamyus (? ? 100 – 170)

Ptolemy

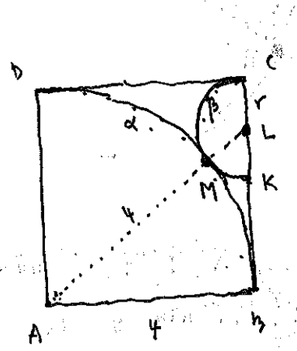
Ptolemaios

Claude Ptolémée ← Fransız soytarılığının zirvesi ...

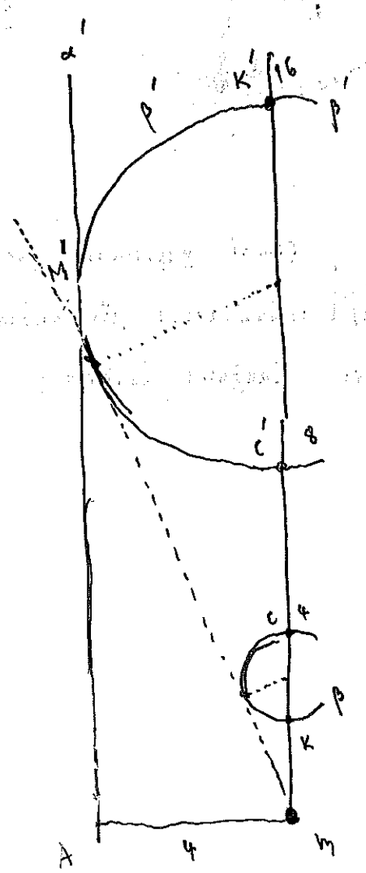
κλαύδιος πτολεμαιος

Peru'dan sevimli bir problem : (Cristian Telo, Lima, Peru

ABCD bir kare. β nın yarıçapı nedir? "Peru Geometrico", 18.12.2015)



$Ev_{M,3/2}$



Hesapla: LAB üçgeninde Pisagor teoremi

$4 + (4-r)^2 = (4+r)^2$

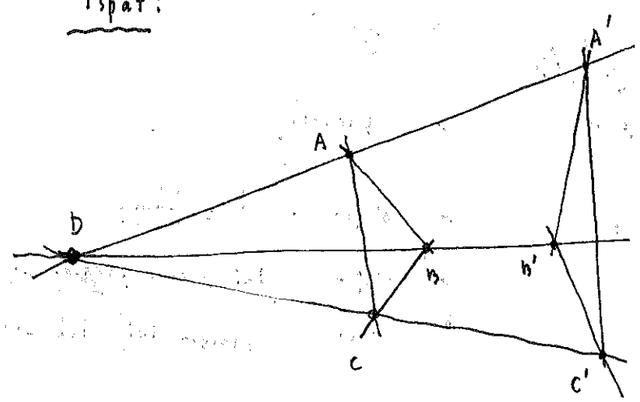
$\longrightarrow \quad r = 1.$

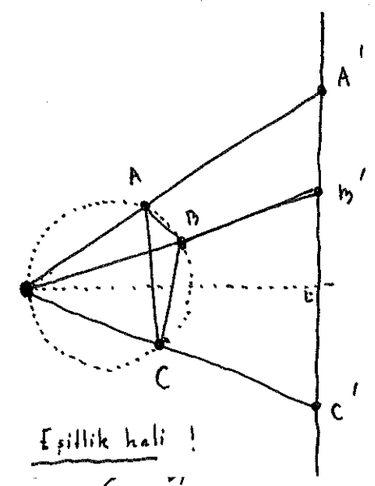
§38: Batlamyus eşitsizliği : (birbirinden farklı ve "uçu" doğrudaş olmayan) Herhangi A, B, C, D noktaları için

$$|AC|\cdot|BD| \leq |AB|\,|CD| + |BC|\,|DA|$$

olup eşitlik ancak ve yalnız A, B, C, D çemberdeş olup AC ve BD çember dahilinde kesiştiği takdirde vaki olur.

İspat:





Eşitlik hali !

D noktası merkez olmak üzere herhangi bir evirtim alalım. A, B, C nin evrikleri sırasıyla A', B', C' olsun: $ABD \cong B'A'D$ olduğundan ($Ev_{D,k}$)

$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|DA'|}{|DB|} = \frac{|DA'|\,|DA|}{|DA|\,|DB|} = \frac{|k|}{|DA|\,|DB|}$$

böylece: $|A'B'| = \frac{|AB|}{|DA|\,|DB|}|k|$, (ve benzer şekilde) $|B'C'| = \frac{|BC|}{|DB|\,|DC|}|k|$, $|C'A'| = \frac{|CA|}{|DC|\,|DA|}|k|$

olup $|A'B'| + |B'C'| \geq |A'C'|$ den

$$\frac{|AB|}{|DA|\,|DB|} + \frac{|BC|}{|DB|\,|DC|} \geq \frac{|AC|}{|DA|\,|DC|}$$ bundan da

$|AB|\,|CD| + |BC|\,|DA| \geq |AC|\,|BD|$ bulunur. Eşitlik: A', B', C' doğrudaş ve B', A' ile C' arasında !

41.7

$\det M = 0$ hali : $\mu = 0$ farzedelim. (böylece $\lambda \neq 0$!)

Eğri

$$\lambda x^2 + 2d'x + 2e'y + f = 0$$

şeklindedir. $x \longrightarrow x - \frac{d'}{\lambda}$ ötelemesi altında

$$x^2 + \frac{2e'}{\lambda} y - \frac{2d'}{\lambda^2} + f = 0$$

σ

olur.

Tasnif: ($\langle \vec{h}, \vec{v} \rangle$)

- $e' \neq 0 \longrightarrow$ parabol
- $e' = 0 \longrightarrow$
  - $\sigma > 0$. boş küme
  - $\sigma < 0$ iki farklı paralel doğru
  - $\sigma = 0$ (çakışık iki) tek doğru

İhtar : Yukardaki tasnifte adı geçen geometri nesneleri nin Öklid geometrisine has dönüşümler altında gene aynı sınıftan nesnelere dönüşecekleri aşikardır. Aynı hal "ölçek değiştirici" ler için de varid olmakla afin dönüşümlerin yukardaki tasnifi saklı tuttuğu anlaşılır. Hassaten bir parabol, elips, hiperbolün her biri afin dönüşümlerle aynı cinsten eğrilere dönüşür. Aşağıdaki güzel problem, bu müşahede ışığında adı geçen üçgen yerine bir eşkenar üçgen almak suretiyle -nisbeten- kolayca çözülebilir : → DeV

American Mathematical Monthly 75 (1968) 670.

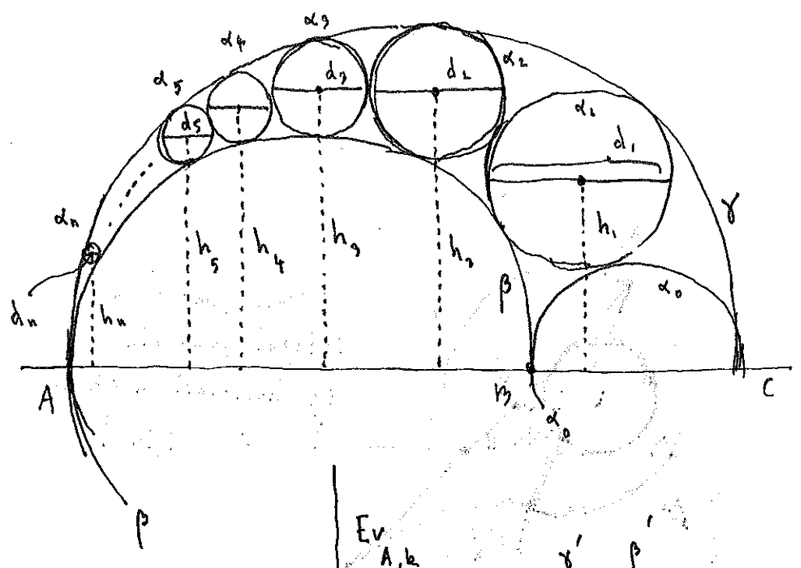
E 2101. *Proposed by H. Demir, Middle East Technological University, Ankara, Turkey*

ABC is a triangle. Let P_a denote the parabola tangent to the sides AB, AC at B, C respectively. The parabolas P_b and P_c are similarly defined. Let these parabolas intersect to the points A', B', C' inside ABC. Denote the areas of the (curvilinear) triangular regions ABC, $A'B'C'$, $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$, $A'BC$, $B'CA$, $C'AB$, by $\triangle$, $\triangle_0$, $\triangle_a'$, $\triangle_b'$, $\triangle_c'$, $\triangle_a''$, $\triangle_b''$, $\triangle_c''$. Then prove

(1) $\triangle_a' = \triangle_b' = \triangle_c' = (\triangle_1)$, $\triangle_a'' = \triangle_b'' = \triangle_c'' = (\triangle_2)$,
(2) $\triangle_0 : \triangle_1 : \triangle_2 : \triangle = 15 : 17 : 5 : 81$.

§39. Pappos'un bir teoremi :

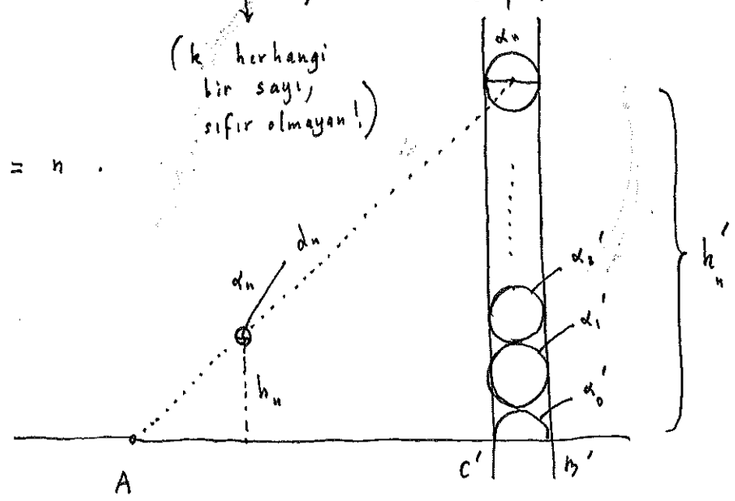
Teorem : $\frac{h_n}{d_n} = n$



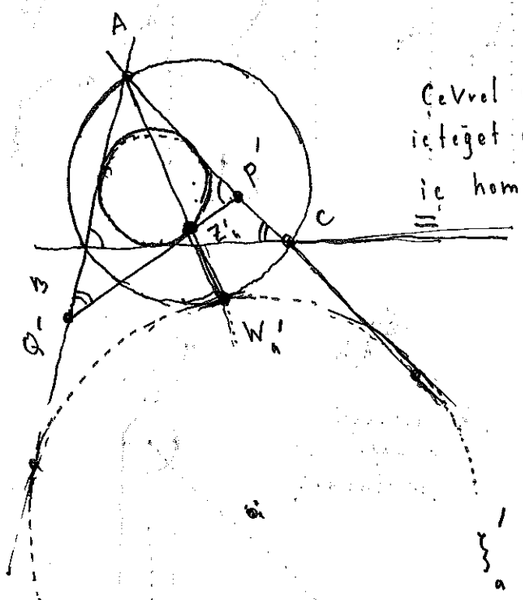
İspat :

(k herhangi bir sayı, sıfır olmayan!)

$$\frac{h_n}{d_n} = \frac{h_n'}{d_n'} = n .$$



İhtar : Dikkat edildiyse, bu noktaya kadar kullanıldığı misallerde evirtim katsayısının seçilmi üzerinde durulmadı. Ne olduğu mühim değildir. §40 da evirtim katsayısı dikkatle seçilecek...

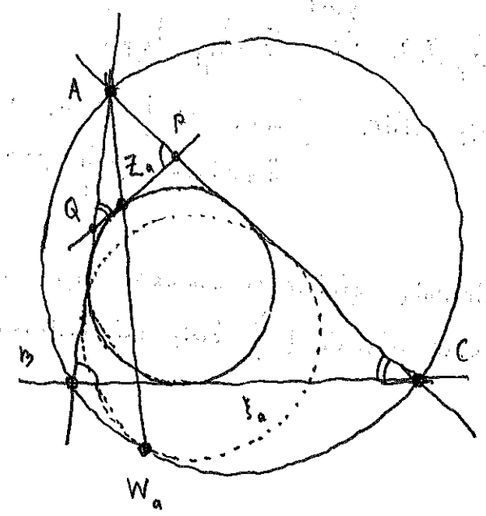


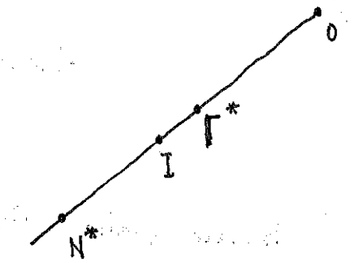
Çevrel çember ve içteğet çemberin iç homoteti merkezi için !

§40. Teorem : Nagel ve Gergonne noktalarının açıca eşlenikleri çevrel çember ve içteğet çemberin, sırasıyla, dış ve iç homoteti merkezleridir.

İspat: $P \in AC$ & $Q \in AB$ noktaları, içteğet çember APQ üçgeninin dışteğet çemberi olacak şekilde seçilsin. (böylece PQ BC ye ters parallel olur!) PQ içteğet çembere Z_a da değiyorsa

Nagel noktasının açıca





eşleniği $\overline{AZ_a}$ üzerindedir.

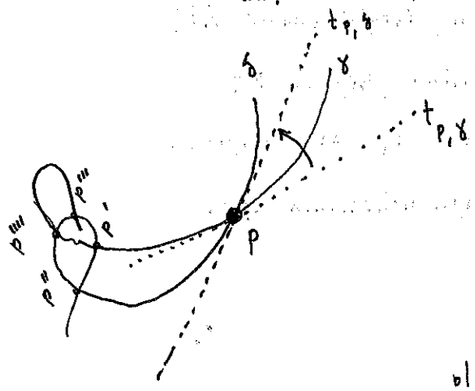
$k = AP \cdot AC = AQ \cdot AB$ alınırsa, $Ev_{A,k}$ ile P, Q noktalarını, sırasıyla C, B noktalarına PQ doğrusunu, çevrel çembere, içteğet çemberi AB ve AC ye ve çevrel çembere içten teğet olan ξ_a çemberine, Z_a noktasını da ξ_a nın çevrel çembere içten teğet olduğu W_a noktasına gönderir.

W_a çevrel çember ve ξ_a nın dış homoteti merkezi, A gene ξ_a ve içteğet çemberin dış homoteti merkezi olduğundan, çevrel çember ve içteğet çemberin dış homoteti merkezi $AW_a = \overline{AZ_a}$ üzerinde kalmalıdır.

Benzer noktalar, v.s : Aynı şekilde BW_b, CW_c.

"Eğriler arasındaki açı" ne demektir?

γ, δ eğrilerinin bir P noktasında kesiştiklerini düşünelim. (başka noktalarda da kesişmeler olabilir...



Varsayalım ki γ ve δ, P noktasında birer teğete sahip olsun: Sırasıyla $t_{\gamma,P}$, $t_{\delta,P}$.

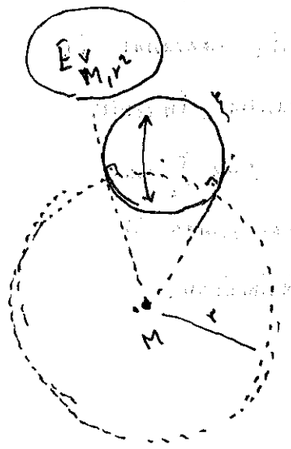
γ ve δ arasındaki (P noktasındaki) açı

$$\measuredangle_P(\gamma,\delta) \overset{\text{tarif}}{=} \measuredangle(t_{\gamma,P}, t_{\delta,P})$$

olarak tarif edilir. (mod π ! γ ve δ üzerinde yön yok !)

* | Benzer şekilde yönlendirilmiş eğriler arasındaki açı da (tabii mod 2π bir miktar olarak !) tarif edilebilir...

İhtar: §41 in bizim için en mühim neticeleri şunlardır:



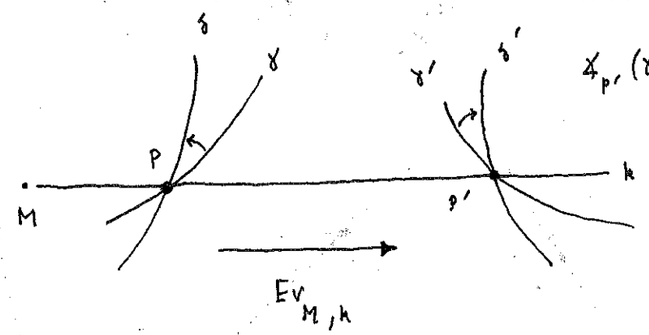
(A) Evirtim altında dik çemberler (veya doğrular) gene dik çember (veya doğrulara) dönüşürler.

(B) Evirtim çemberine dik bir çember (ℓ) kendisine dönüşür...

§41. Evirtimin açılar üzerindeki tesiri:

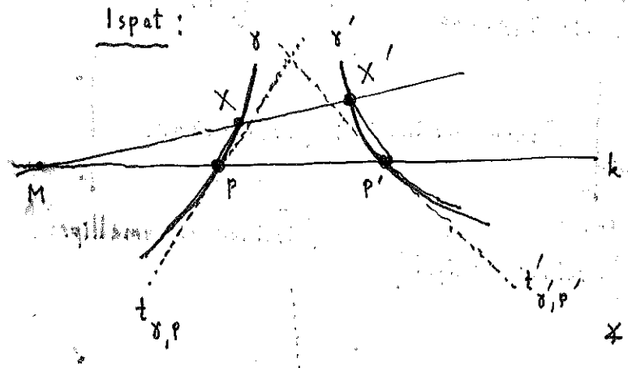
Evirtim eğriler arasındaki açıları -1 ile çarpar...

Tam olarak:



$$\measuredangle_{P'}(\gamma',\delta') = -\measuredangle_P(\gamma,\delta)$$

İspat:



γ üzerinde herhangi bir X noktası için (P, X, P', X' çemberdeş olup !)

$$\measuredangle^{MP}_{P}(k'', PX) = -\measuredangle^{MP'}_{P'}(k'', P'X')$$

$$\downarrow X \to P$$

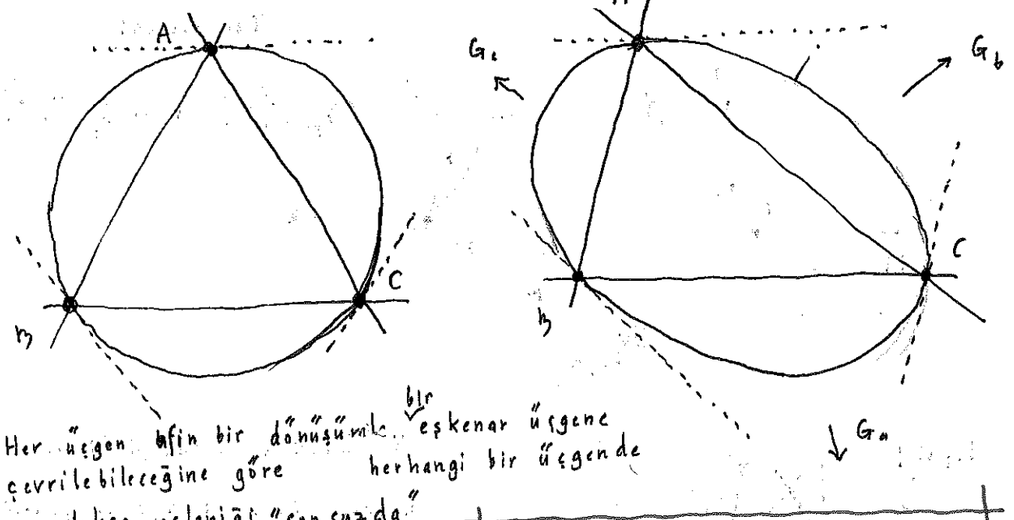
$$\measuredangle(k, t_{\gamma,P}) = -\measuredangle(k, t'_{\gamma',P'})$$

Böylece,

$$\begin{aligned}\measuredangle_P(\gamma,\delta) &= \measuredangle(t_{\gamma,P}, t_{\delta,P}) \\ &= \measuredangle(t_{\gamma,P}, k) + \measuredangle(k, t_{\delta,P}) \\ &= -\measuredangle(t'_{\gamma',P'}, k) - \measuredangle(k, t'_{\delta',P'}) \\ &= -\measuredangle(t'_{\gamma',P'}, t'_{\delta',P'}) = -\measuredangle_{P'}(\gamma',\delta')\end{aligned}$$

Afin dönüşümlerin bir diğer tatbikatı :

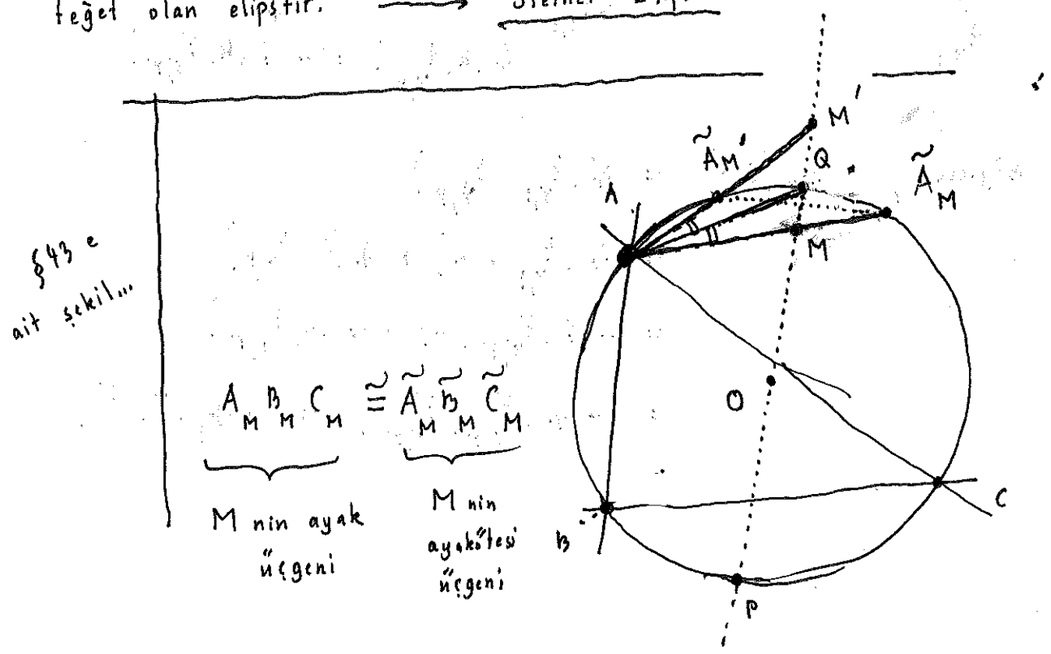
Sayfa 13.5 un sonunda, bir üçgende uzunlukça eşlenikleri "sonsuzda" olan noktaların geometrik yeri sorulmuştu. Eşkenar üçgende, uzunlukça ve açıca eşleniklik çakıştığından, sualin cevabı, çevrel çemberdir.



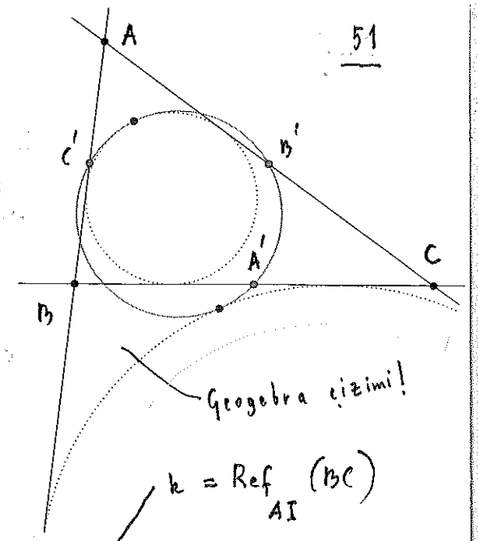
Her üçgen afin bir dönüşümle bir eşkenar üçgene çevrilebileceğine göre herhangi bir üçgende uzunlukça eşleniği "sonsuzda" olan noktaların geometrik yeri A, B, C de geçen ve o noktalarda sırasıyla G_bG_c, G_cG_a, G_aG_b ye teğet olan elipstir. ⟶ Steiner Elipsi

Jakob Steiner : (1796–1863)

("steiner circumellipse")

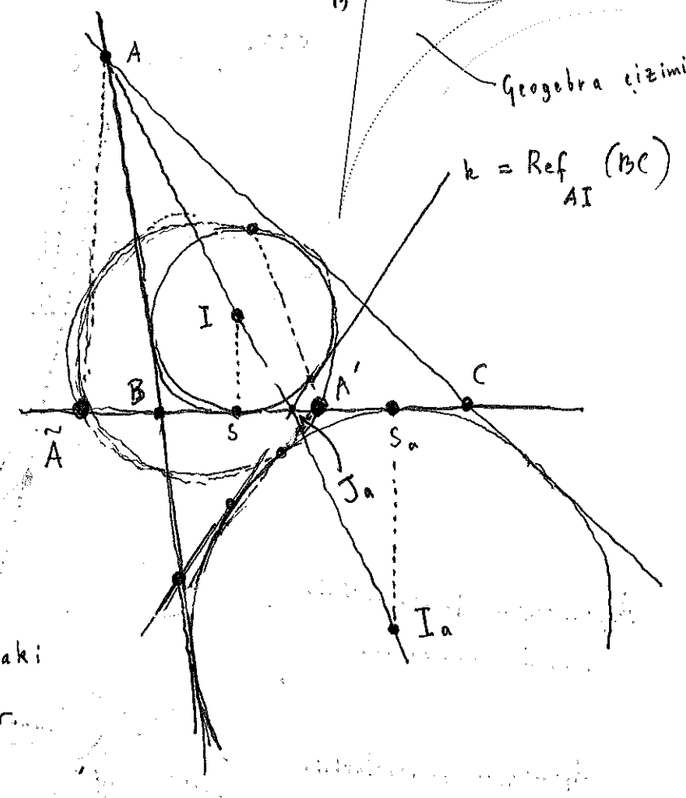


§42. Feuerbach teoremini ziyaret :



$(\tilde{A}, \mathfrak{J}_a ; S, S_a)$ bir harmonik dörtlü teşkil eder. Böylece, çapı $[S,S_a]$ (merkezi de tabii A') olan çembere göre evirtim J yi $\tilde{A}$ ya gönderir.

$k = \text{Ref}_{AI}(BC)$ doğrusu hem iç teğet çembere, hem de A karşısındaki dışteğet çembere teğettir. Bu çemberler in. herbiri adıgeçen evirtim altında kendisine, k doğrusu da $\tilde{A}$ ve A'nden geçip, A' den geçen çapı k y dik (ya da OA ya paralel çembere, yani dokuz nokta çemberine dönüşür.

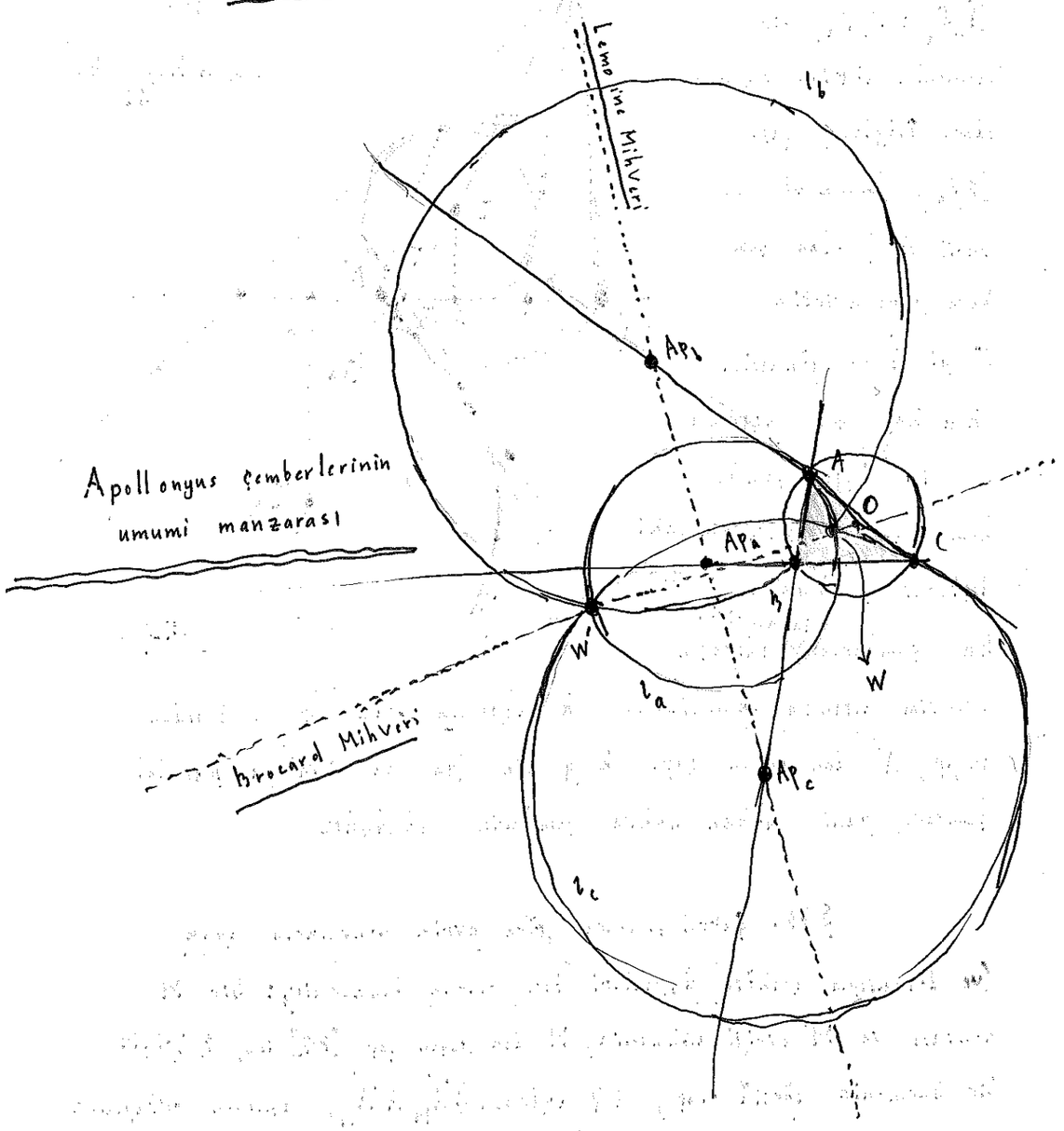


§43. Çevrel çembere göre evrik noktaların ayak (ve dolayısıyla ayaköte) üçgenleri ters olarak benzerdir. :

Bir M noktası ve M' evriği alındıkta, M den geçen çap [PQ] ise, (P, Q; M, M') bir harmonik dörtlü olup, AQ doğrusu $\measuredangle \tilde{A}_M A \tilde{A}_{M'}$ açısının ortayıdır. Böylece : $\tilde{A}_{M'} = \text{Yan}_{PQ}(\tilde{A}_M)$. Böylece $\tilde{A}_M\tilde{B}_M\tilde{C}_M$ ve $\tilde{A}_{M'}\tilde{B}_{M'}\tilde{C}_{M'}$ üçgenleri ters benzerdir.

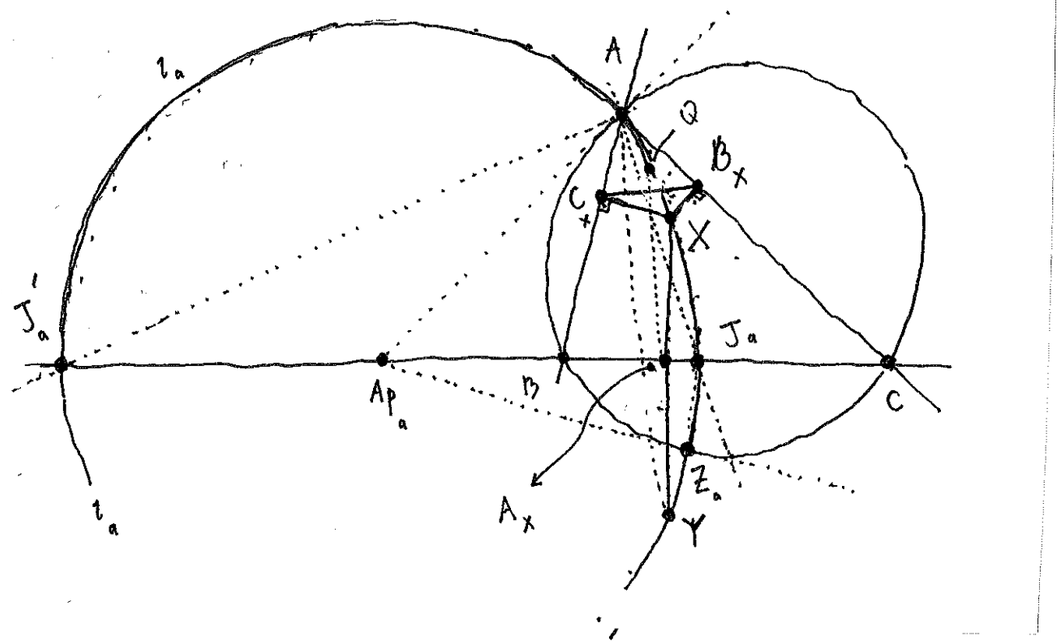
(Perge'li) Apollonyus (-262/-190)

Απολλώνιος



§44. Apollonyus çemberleri & ileri Brocard dokusu:

A köşesinden geçen iç (dış) açıortay BC yi J_a da (J_a' da) kessin. (ABC yi çeşitkenar alalım!) A köşesinden geçen Apollonyus çemberi $[J_a, J_a']$ çaplı çemberdir. Bu çemberi ι_a ile, gota merkezini de Ap_a ile gösterelim. Benzer şekilde ι_b, ι_c çemberleri ve sırasıyla merkezleri Ap_b, Ap_c alınsın.



$X \in \iota_a$ ise $(B, C; J_a, J_a')$ harmonik dörtlü olduğundan ve $XJ_a \perp XJ_a'$ olduğundan XJ_a, XJ_a' doğruları XBC üçgeninde X den geçen açıortaylar olup $|XB| : |XC| = |J_aB| : |J_aC| = |AB| : |AC|$.

Tersine olarak da X noktası $|XB| : |XC| = |AB| : |AC|$ ise, o zaman da $|XB| : |XC| = |J_aB| : |J_aC| = |J_a'B| : |J_a'C|$ olup XJ_a, XJ_a' doğruları XBC üçgeninde X den geçen açıortaylar olur ve $XJ_a \perp XJ_a'$ olup, $X \in \iota_a$.