

Cem Tezer

Çakılları Geometri Dersleri

(2)

Cem Tezer



Handwritten text inside a rectangular box, possibly a title or a note.

Çakırası

Geometri Dersleri

Handwritten text below the section header.

Handwritten text on the left side of the page.

(2)

Handwritten text and mathematical expressions in the middle section.

Cem Tezer

Ankara

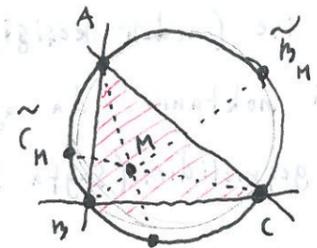
2017

Handwritten text at the bottom of the page, including mathematical notations.

Handwritten text at the very bottom of the page, possibly a signature or a note.

Hatırlayalım: Ayak üçgeni ve ayakkesesi üçgeni benzerdir!
aynı yönde

(+) \equiv : aynı yöne sahip üçgenler için!



Murada $[AM]$ yarıdoğrusunun $[AB]$ ve $[AC]$ yarıdoğruları arasında kaldığını farz edebiliriz!

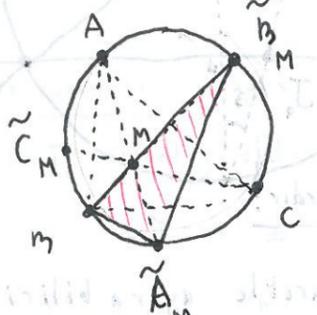
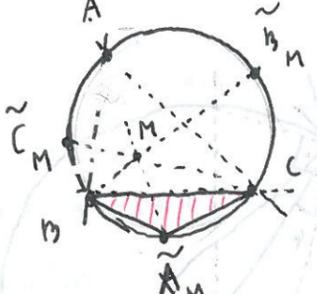
A, \tilde{A}_M noktaları BC doğrusunun farklı taraflarında...

$$A M C \stackrel{(+)}{\equiv} \tilde{A}_M B C \stackrel{(-)}{\equiv} \tilde{A}_M C B$$

$$\therefore \boxed{A M C \stackrel{(+)}{\equiv} \tilde{A}_M C B}$$

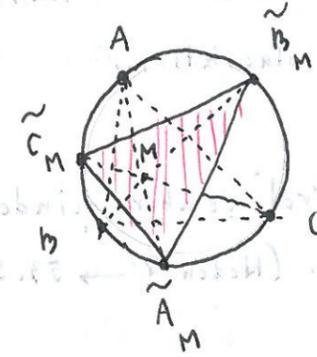
C, \tilde{C}_M noktaları $\tilde{A} B$ doğrusunun aynı tarafında...

$$\tilde{A} C B \stackrel{(+)}{\equiv} \tilde{A} \tilde{C}_M B$$

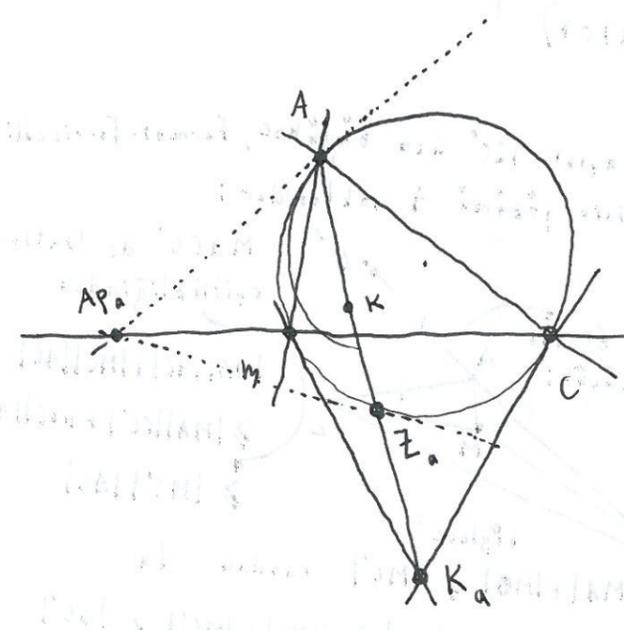


B, \tilde{B}_M noktaları $\tilde{A} B$ doğrusunun aynı tarafında...

$$\tilde{A} B M \stackrel{(+)}{\equiv} \tilde{A} \tilde{B}_M C$$



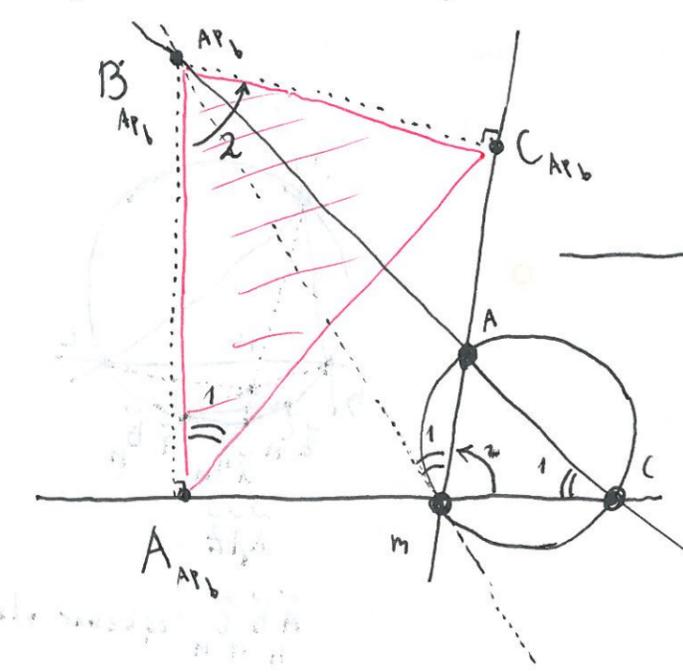
üzerinde kalırlar.



-Gene kolayca $K \in AZ_a$ (ve tabii benzer olarak $K \in BZ_b, K \in CZ_c$) olduğu görülür. Hatırlayalım ki AZ_a doğrusu, ν_a ile çevrel çemberin kuvvet mihreridir. Mühtemelen Lemoine noktası K , çevrel çemberin ve Apollonyus çemberlerinin

kuvvet merkezidir!

Son olarak da $A_{p_a}, A_{p_b}, A_{p_c}$ noktalarının ayak üçgenlerinin AMC ile aynı "şekil" e sahip olduklarını görelim:

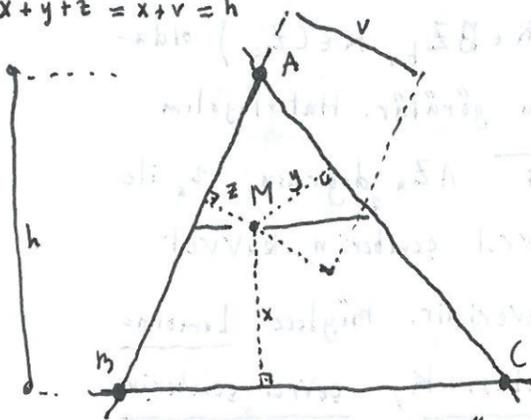


$$\begin{cases} A_{p_a} B_{p_a} C_{p_a} \cong A C B \\ A_{p_b} B_{p_b} C_{p_b} \cong C B A \\ A_{p_c} B_{p_c} C_{p_c} \cong B A C \end{cases}$$

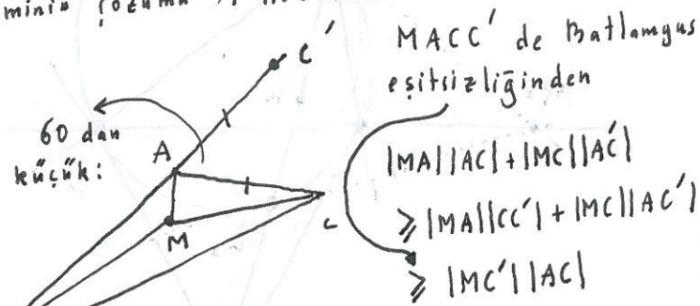
Torricelli'nin talebesi...

Vincenzo Viviani (1622/1703)

$x+y+z = x+v = h$



A açısı 120° den büyükse, Fermat-Torricelli probleminin çözümü A noktasıdır:



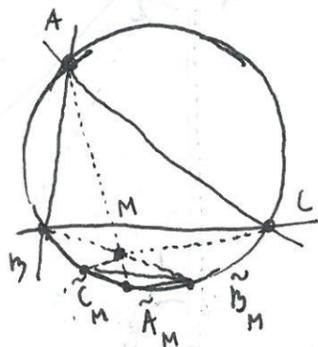
MACC' de Batlamus eşitsizliğinden
 $|MA| + |AC| + |MC| \geq |MA| + |CC'| + |MC| \geq |MC'| + |AC|$

böylece
 $|MA| + |MB| \geq |MC|$ bundan da
 $|MA| + |MB| + |MC| \geq |MM'| + |MC'| \geq |BC'| = |AA'| + |AB| + |AC|$

ABC eşkenar üçgeninde, üçgenin içindeki bir M noktasının kenarlarına uzaklığı toplamı M'nin yerine bağlı değildir.

Yaygın tabir:

V, V' ; "Isogone points"



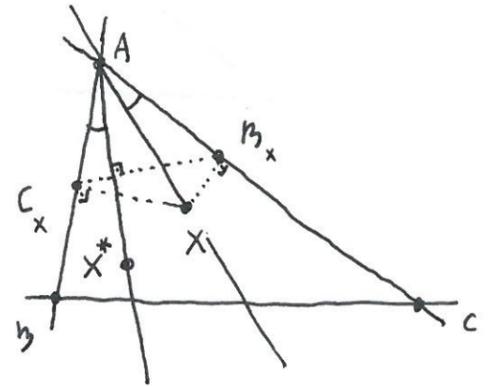
$\tilde{A} \tilde{B} \tilde{C}$ eşkenar olamaz!

§45. Burada (§29) Fermat-Torricelli problemini yeniden gözden geçirelim:

Yardımcı teorem: X^* noktası, X noktasının açılara eşleniği olsun. O zaman

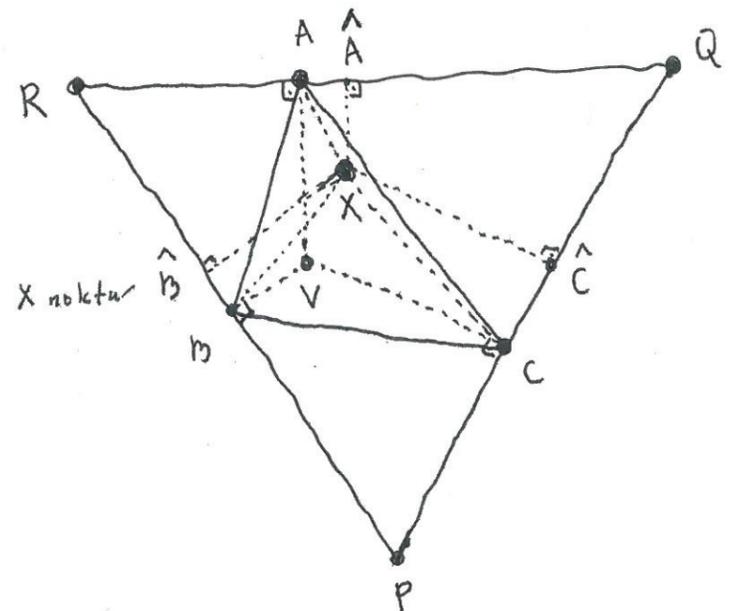
$\angle (X^*B, X^*C) = \pi - \frac{2\pi}{3} \pmod{\pi}$ ve benzerleri...

İspat: Burada X, B_x, A, C_x noktalarının çemberdeşliğinden çıkararak, $AX^* \perp B_x C_x$ olduğunu görmek yeter...



V ve V' noktaları, sırasıyla W ve W'nün açılara eşlenikleri olsun. $\angle A, \angle B, \angle C$ açılarında hiç birisi 120° yi aşmadığı takdirde, V noktası Torricelli noktasıdır. Fermat-Torricelli probleminin (§29) diğer bir çözümünü verelim:

Neden? $\left\{ \begin{array}{l} ABC \text{ nin iç açıları } 120^\circ \text{ yi aşmadığından} \\ W \text{ ve onun açılara eşleniği } V, ABC \text{ nin içinde kalır: Herhangi bir } X \text{ noktası için} \end{array} \right.$
 $|XA| + |XB| + |XC| \geq |X\hat{A}| + |X\hat{B}| + |X\hat{C}| = |VA| + |VB| + |VC|$



PQR de Viviani teoremi!

[Faint handwritten text at the top of page 55]

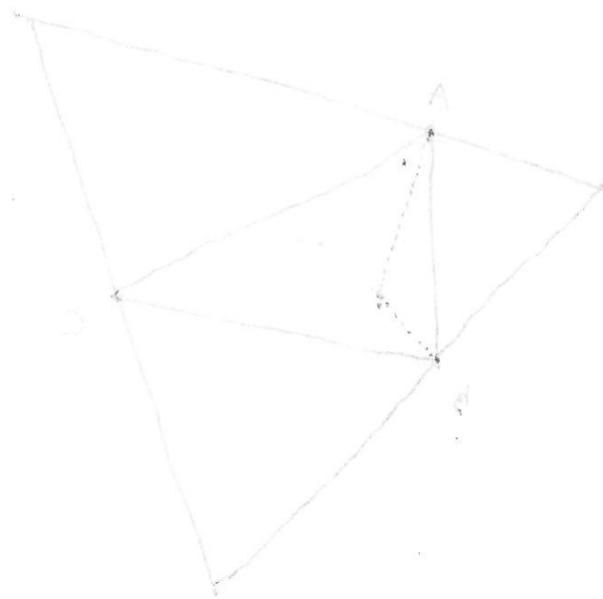
[Faint handwritten text in the middle of page 55]

$$X(X, Y, Z) = X(X, Y, Z)$$

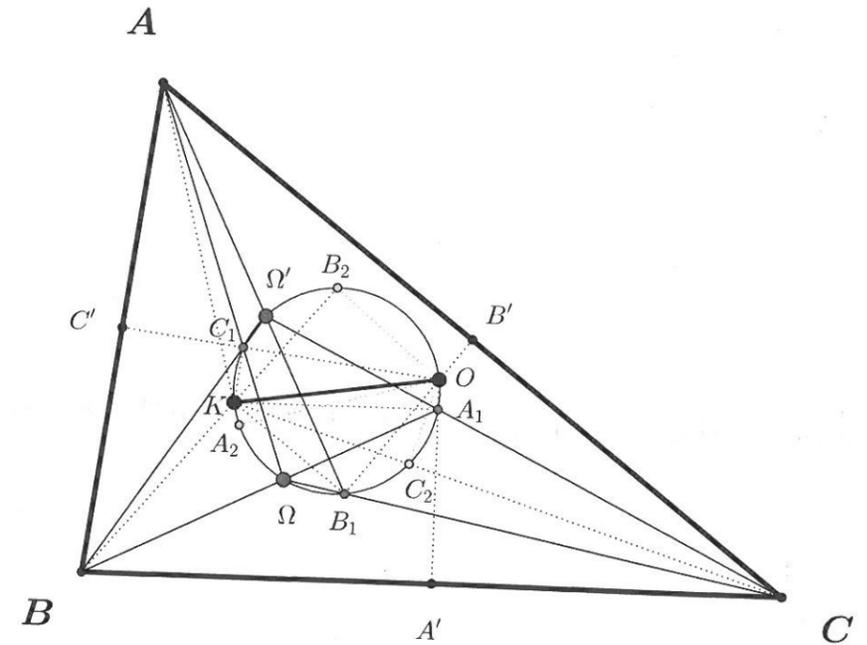


[Faint handwritten text surrounding the diagram on page 55]

[Faint handwritten text at the bottom of page 55]



[Faint handwritten text and mathematical expressions at the bottom of page 55]



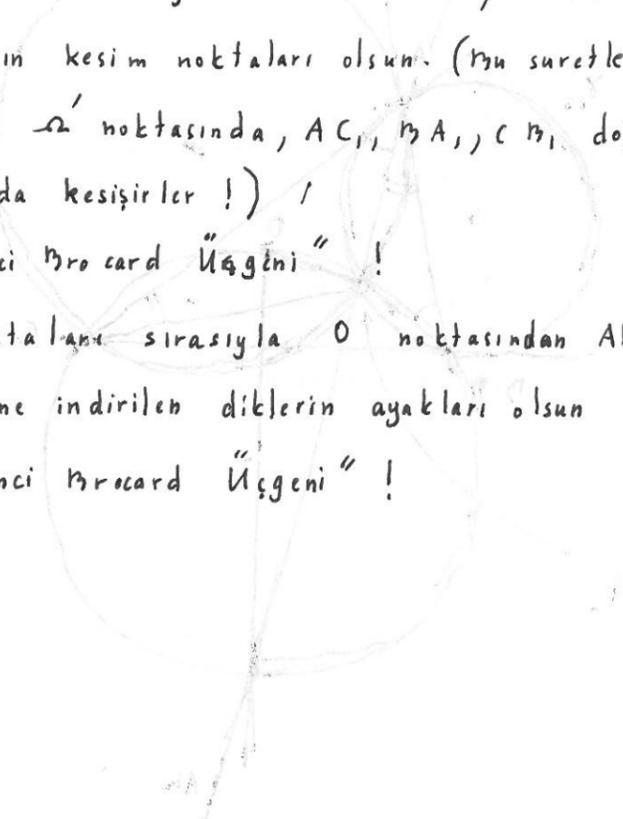
§46. Brocard Çemberi :

A_1, B_1, C_1 noktaları sırasıyla $B\Omega$ ve $C\Omega'$, $C\Omega$ ve $A\Omega'$, $A\Omega$ ve $B\Omega'$ doğrularının kesim noktaları olsun. (Bu suretle A_1, B_1, C_1 doğruları Ω' noktasında, A_2, B_2, C_2 doğruları da Ω noktasında kesişirler !)

A_1, B_1, C_1 : "Birinci Brocard Üçgeni" !

A_2, B_2, C_2 noktaları sırasıyla O noktasından AK , BK, CK doğruları üzerine indirilen diklerin ayakları olsun

A_2, B_2, C_2 : "İkinci Brocard Üçgeni" !

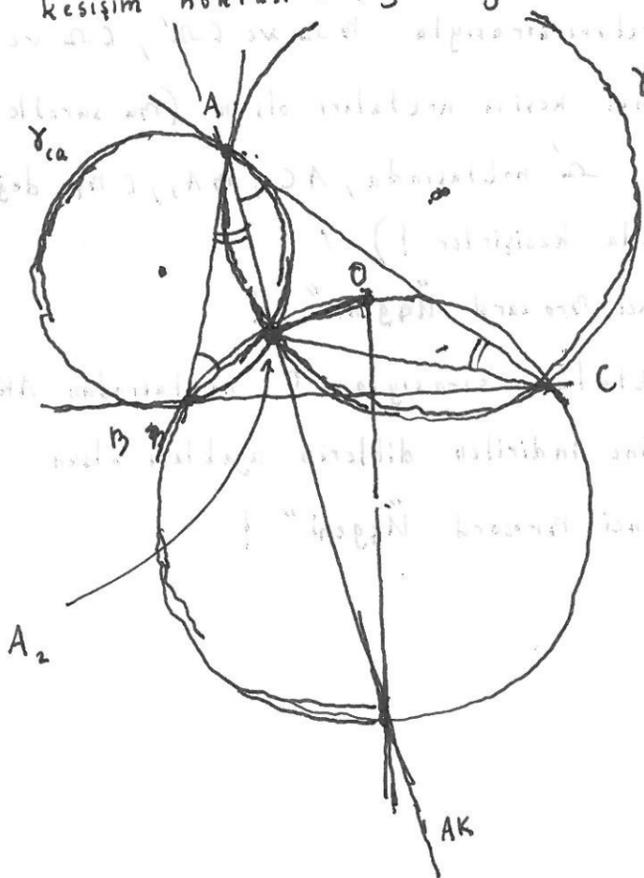


İhtar:

İkinci Mrocard üçgeninin köşeleri hakkında hoş bir münasebet:

γ_{**} çemberlerini, Mrocard noktalarını sunarken gözden geçirmiştik. (Sayfa 10)
Hatırlanacağı gibi $\gamma_{ac}, \gamma_{ba}, \gamma_{cb}$ çemberleri Ω da
 $\Omega_{ab}, \Omega_{bc}, \Omega_{ca}$ çemberleri Ω' de } kesilir.

Burada A_2 noktasının γ_{ba} ve γ_{ca} nin A olmayan kesişim noktası olduğunu görelim:



Teorem: $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, O, K, \Omega, \Omega'$ aynı çember üzerinde kalır. $[OK]$ doğru parçası bu çemberin çapı olup, Ω, Ω' noktaları OK doğrusuna göre bakışık konumlar işgal ederler.

İspat, aşağıdaki küçük gezintiden ortaya çıkacaktır:

Tabii ki A_2, B_2, C_2 noktaları $[O, K]$ çaplı çember üzerindedir.

* Arada şunları görelim: $AK = AZ_a, BK = BZ_b, CK = CZ_c$ olduğundan A_2, B_2, C_2 sırasıyla Ap_a, Ap_b, Ap_c noktalarının ABC nin çevrel çemberine göre eVrikleridir. (Sayfa 52 deki şekil!) Sayfa 54 de ayak üçgenleri hakkındaki ihtarin ışığında

$$A_{A_2} B_{A_2} C_{A_2} \cong ACB \quad \& \quad A_{B_2} B_{B_2} C_{B_2} \cong CBA \quad \& \quad A_{C_2} B_{C_2} C_{C_2} \cong BAC$$

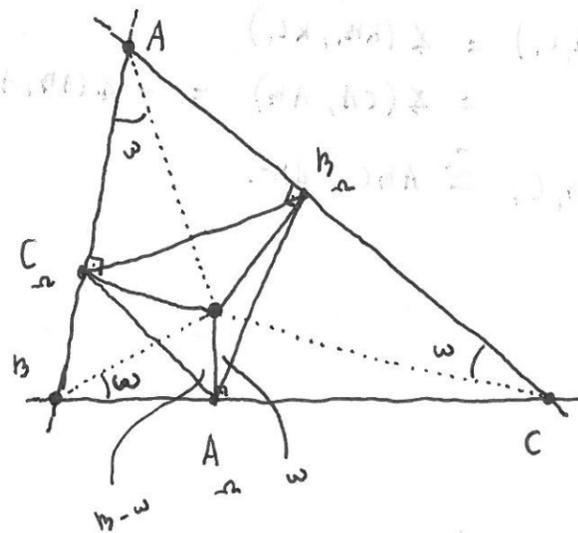
olduğu görülür.

Ayak üçgenleri bahsine devamla $A_{A_2} B_{A_2} C_{A_2} \cong BCA$

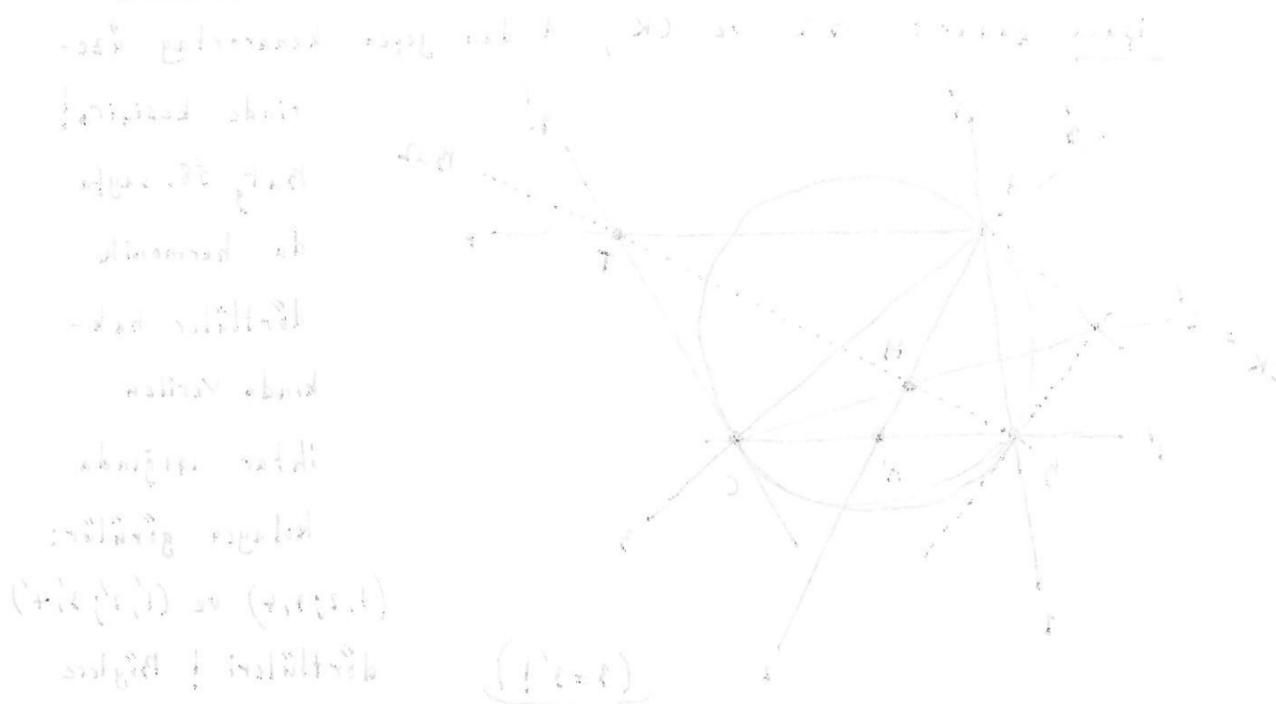
&

$$A_{A_2} B_{A_2} C_{A_2} \cong CAB$$

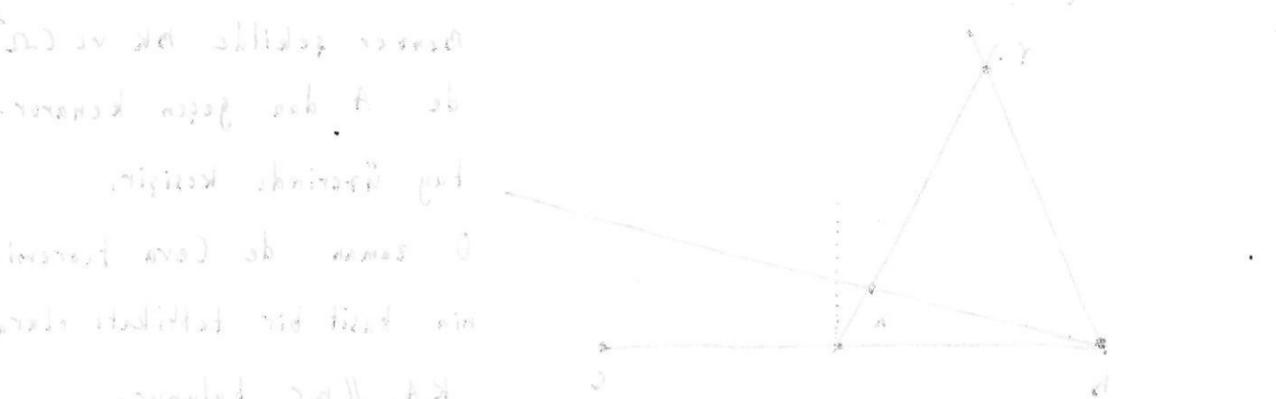
olduğu görülsün...



İspatın en nazik noktası harmonik dörtlülere ait çok basit - ama o derecede de mühim ve şumullü - bir hınsusiyetden faydalanarak elde edilecek :

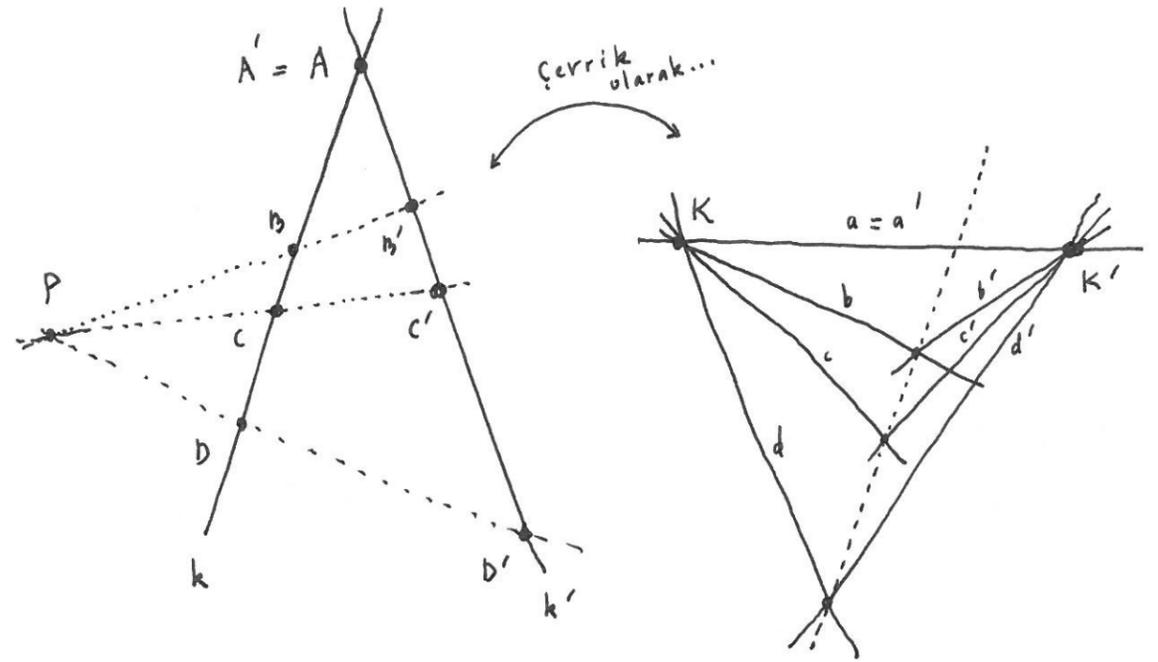


$(A, B; C, D)$ ve $(A', B'; C', D')$ harmonik dörtlülerinde $A=A'$ ise, o zaman B, B', C, C', D, D' doğruları noktadaş yaht paraleldir. (İspat: B, B' ve C, C' doğruları P de kesişsin PD doğrusu k' yu ancak D' de kesebilir!)



$(a, b; c, d)$ ve $(a', b'; c', d')$ harmonik dörtlülerinde $a=a'$ ise, o zaman b ve b' , c ve c' , d ve d' doğruları ya paraleldir, ya da kesiştikleri noktalar doğrudadır.

İspatın en nazik noktası harmonik dörtlülere ait çok basit - ama o derecede de mühim ve şumullü - bir hınsusiyetden faydalanarak elde edilecek :



$(A, B; C, D)$ ve $(A', B'; C', D')$ harmonik dörtlülerinde $A=A'$ ise, o zaman B, B', C, C', D, D' doğruları noktadaş yaht paraleldir. (İspat: B, B' ve C, C' doğruları P de kesişsin PD doğrusu k' yu ancak D' de kesebilir!)

$(a, b; c, d)$ ve $(a', b'; c', d')$ harmonik dörtlülerinde $a=a'$ ise, o zaman b ve b' , c ve c' , d ve d' doğruları ya paraleldir, ya da kesiştikleri noktalar doğrudadır.

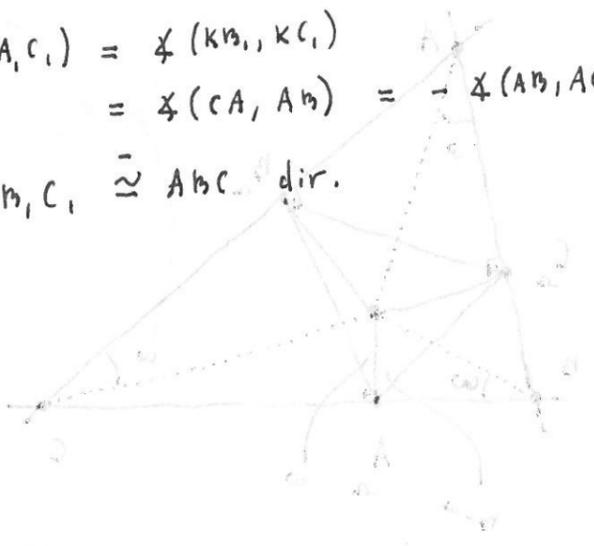
[Faint handwritten notes, likely bleed-through from the reverse side of the page.]

[Faint handwritten notes, likely bleed-through from the reverse side of the page.]

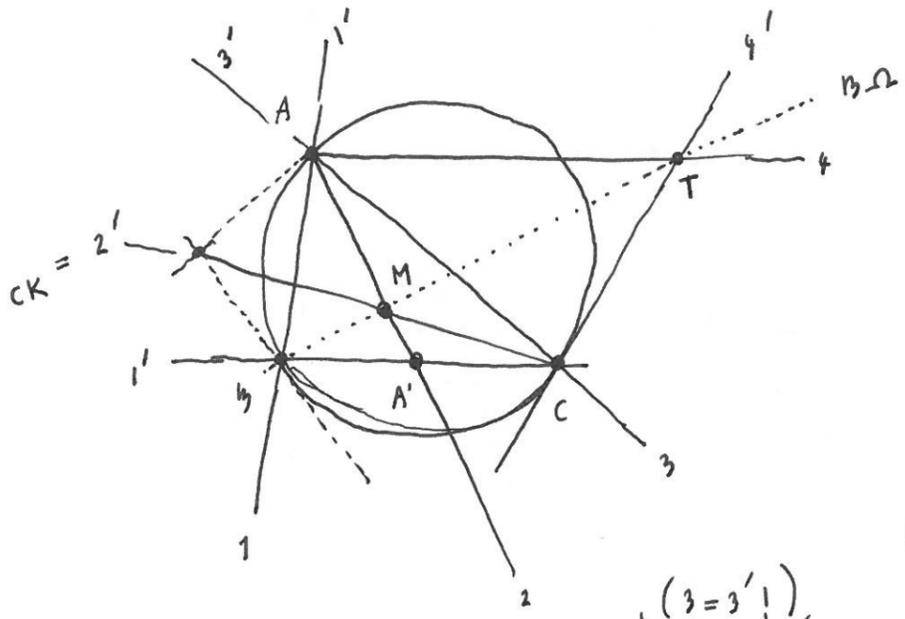
[Faint handwritten notes, likely bleed-through from the reverse side of the page.]

[Faint handwritten notes, likely bleed-through from the reverse side of the page.]

İhtar: $\sphericalangle(A, m_1, A, c_1) = \sphericalangle(Km_1, Kc_1)$
 $= \sphericalangle(cA, Am_1) = -\sphericalangle(AB, AC)$
 olup, $A_1 m_1 c_1 \cong ABC$ dir.

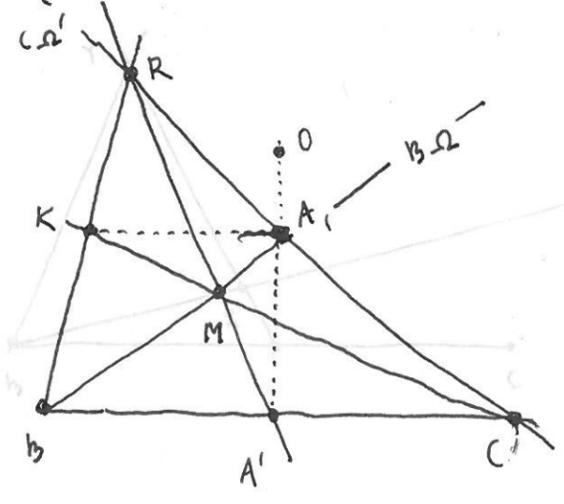


Birinci Brocard Üçgeninin köşeleri hakkında en mühim ipucu şudur: m_2 ve CK , A dan geçen kenarortay üzerinde kesişir!



Bu, 58. sayfa da harmonik dörtlüler hakkında verilen ihtar ışığında kolayca görülür: $(1, 2; 3, 4)$ ve $(1', 2'; 3', 4')$ dörtlülere! Böylece

B, M, T noktaları doğrudadır. Halbuki $m_2 = mT$ olup, M de A dan geçen kenarortay üzerindedir.



Benzer şekilde mK ve c_2 de A dan geçen kenarortay üzerinde kesişir. O zaman da Ceva teoreminin basit bir tatbikası olarak $KA_1 \parallel mC$ bulunur. Tabii, benzer olarak $Km_1 \parallel cA$ & $Kc_1 \parallel AB$ dir. Böylece: $\sphericalangle OA_1 K = \pi/2$ olup, A_1 (ve benzer şekilde

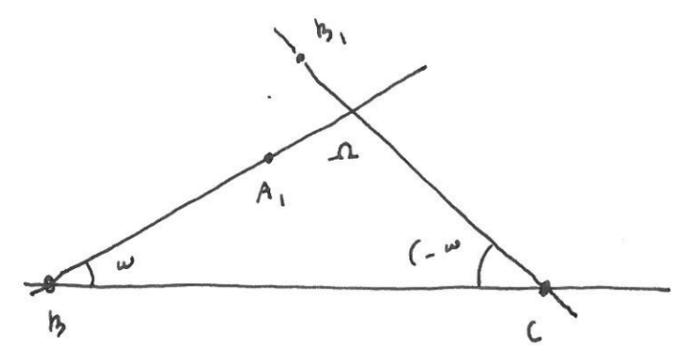
m_1, c_1 de...) $[OK]$ çaplı çember üzerindedir.

bu doğruların dairesel ortam üzerindeki...
 ...
 ...



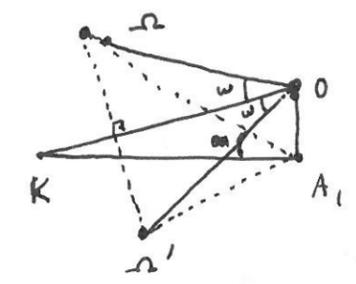
(A, B, C, K) or (A1, B1, C1, K1)
 ...
 ...
 ...

(A, B, C, K) or (A1, B1, C1, K1)
 ...
 ...
 ...



Diğer taraftan
 $\angle(\Omega A_1, \Omega m_1) = -\omega$
 $= \angle(C, A_1, C, m_1)$
 s. 58.5 olup, Ω (ve

benzer şekilde Ω' de!) aynı $[O, K]$ çaplı çember üzerindedir.



Nihayet
 $\angle(O\Omega, OK) = \angle(A, \Omega, A, K)$
 $= \angle(B\Omega, \Omega C) = \omega$
 ve
 $\angle(O\Omega', OK) = \angle(A, \Omega', A, K)$
 $= \angle(C\Omega, \Omega C) = -\omega$

olup Ω, Ω' noktaları, OK doğrusuna göre bakışık yerlerde bulunurlar!

F. Çevirtim :

§ 47. Çevirtim, yukarda görülen evirtimle yakından alakalı bir dönüşüm olup, projektif geometriye geçiş için çok uygun bir nokta teşkil eder.

ID^* , Öklid düzlemindeki doğruların kümesi olsun.

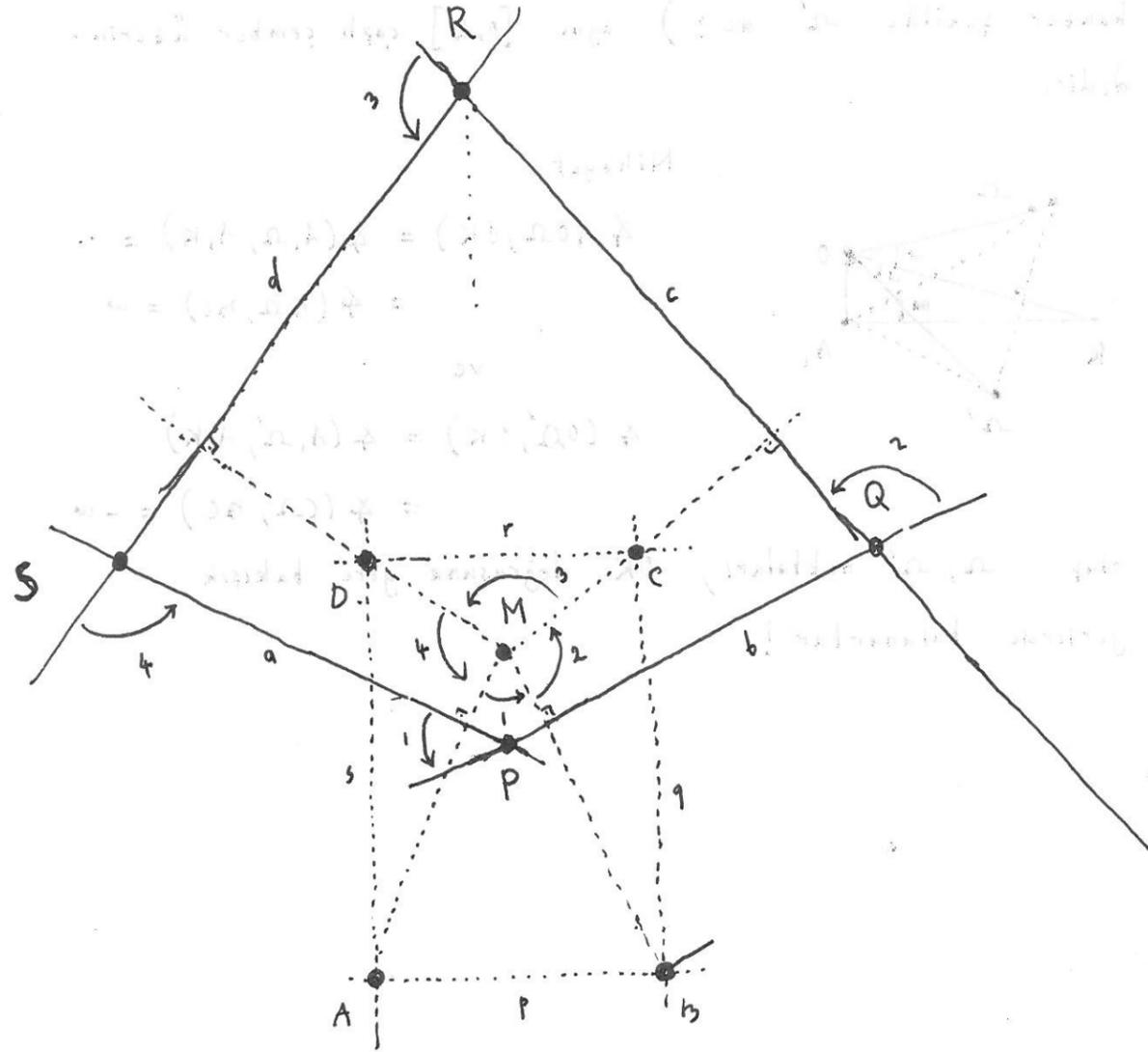
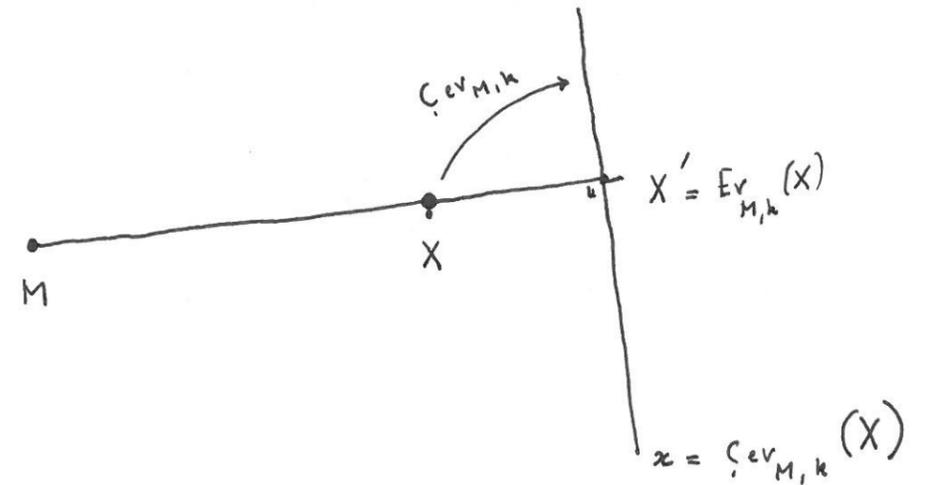
Merkezi $M \in ID$ ve kuvveti kat sayısı $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ olan

çevirtim

$$Çev_{M,k} : ID - \{M\} \longrightarrow ID^* - \{l \mid M \in l\}$$

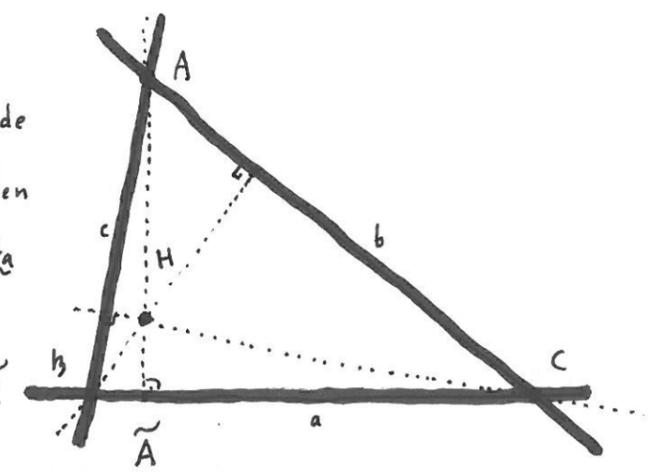
(M haricindeki noktalar...) \longrightarrow (M den geçmeyen doğrular...)

şeklinde bir fonksiyon olup, herhangi bir $X \neq M$ için $Çev_{M,k}(X)$ doğrusu, $X' = Ev_{M,k}(X)$ noktasından geçip MX' doğrusuna dik olan doğrudur.



Gene bu halde $\varphi = \text{Çev}_{M,k}$ yi " γ ya göre çevirtim" olarak adlandırabiliriz.

Esasen bu istilahatı $k < 0$ halinde de kullanmakta bir zarar yoktur. Tabii, o zaman γ nin yarıçapı hayalî -imaginaire- olacaktır!

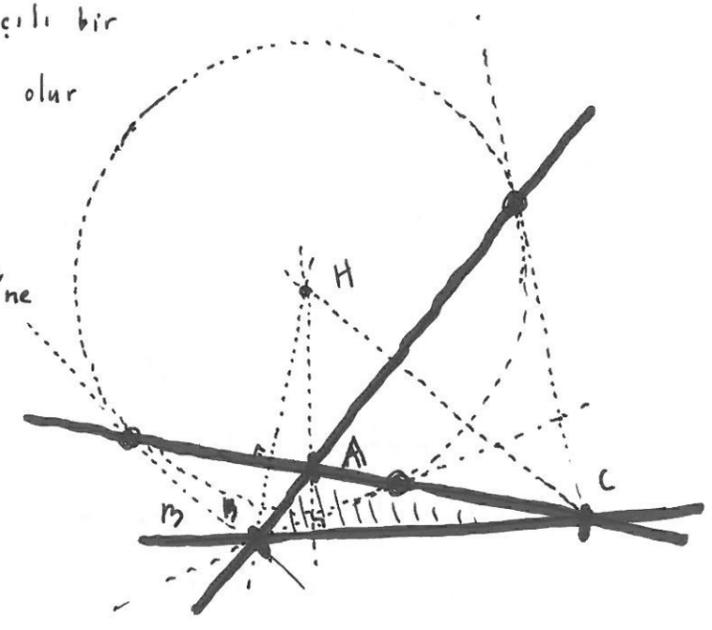


§48. Misal: ABC üçgeninde $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$, sırasıyla A, B, C den geçen yüksekliklerin ayakları olsun.

$k = HA \cdot H\tilde{A} = HB \cdot H\tilde{B} = HC \cdot H\tilde{C}$
ise $\text{Çev}_{H,k}$ çevirtimi

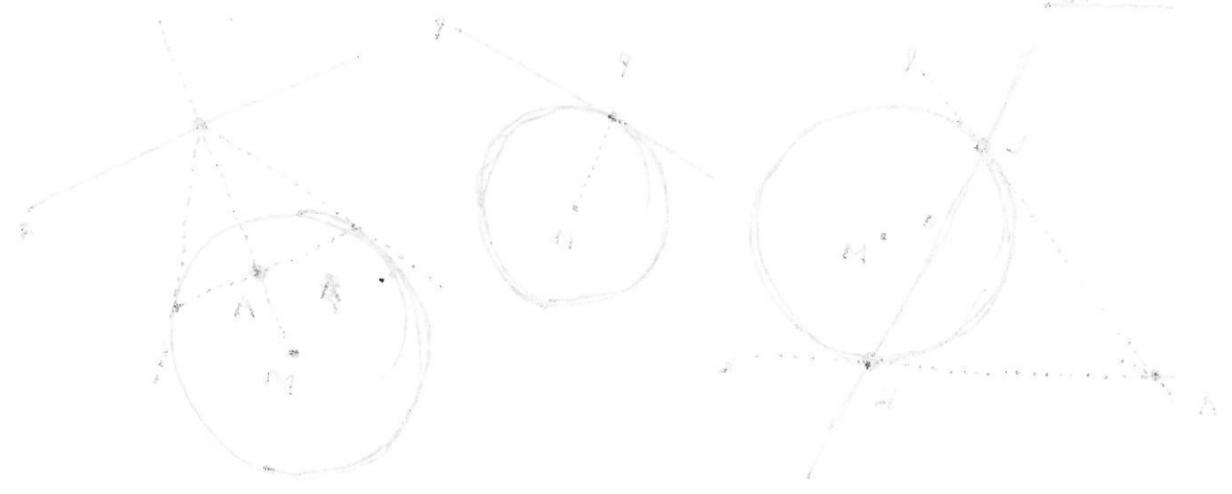
A, B, C noktalarını sırasıyla $a = B\tilde{C}, b = CA, c = AB$ doğrularına gönderir. $\text{Çev}_{H,k}$ üçgenin temel çevirtimidir.

Eğer ABC geniş açılı bir üçgen ise, o zaman $k > 0$ olur ve $\text{Çev}_{H,k}$ merkezi H ve yarıçapı \sqrt{k} olan bir çembere, "kutup çemberi"ne göre çevirtim olarak görülebilir. (Dar açılı bir üçgende bu çemberin "imaginaire" olduğunu düşünebiliriz!)



Handwritten notes in Turkish, partially illegible due to fading and bleed-through.

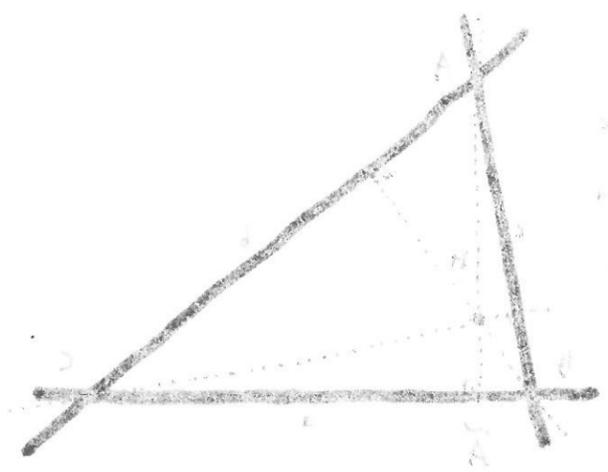
Handwritten notes in Turkish, partially illegible due to fading and bleed-through.



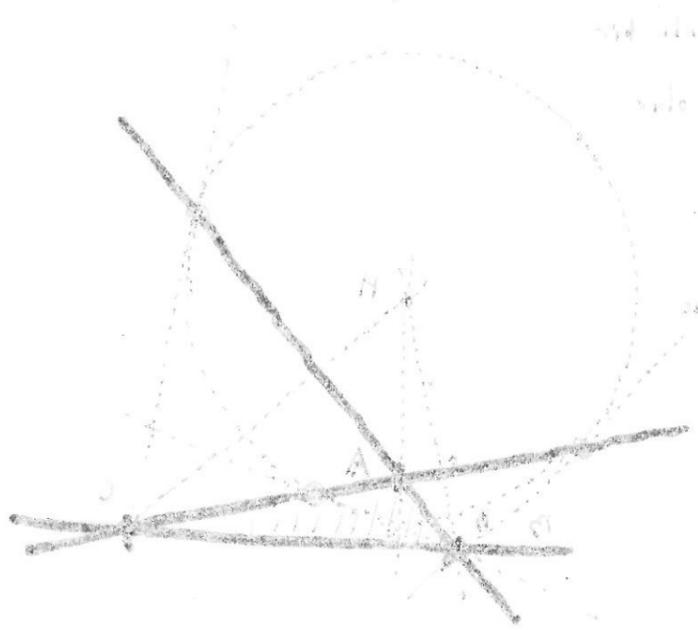
polar circle : kutup çemberi

Handwritten notes in Turkish, partially illegible due to fading and bleed-through.

... incidence relations ...



... incidence relations ...



... incidence relations ...

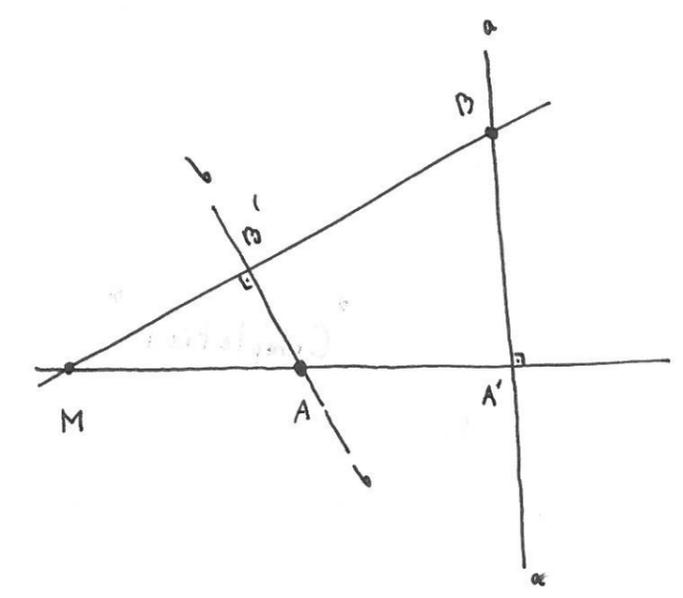
§49. Bir çevirtim altında doğru ve noktaların üzerindelikleri değişmez : Yani - anacvi yazılımla göstererek olursak

$$A \in b \text{ ancak } b \in a \text{ ve yalnız}$$

halinde mümkündür. (Alışık olmayanlar için : $\varphi = \text{Çev}_{M,k}$ olsun.)

$$A \in b \text{ ancak } \varphi(b) \in \varphi(A) \text{ ise mümkündür!}$$

Bunu şu şekilde kolayca görebiliriz :



$b \in a$ olsun.
 A, B, A', B' çemberdeş olup,
 $AB' \perp MB$ olmalıdır.
 Yani $A \in b$!

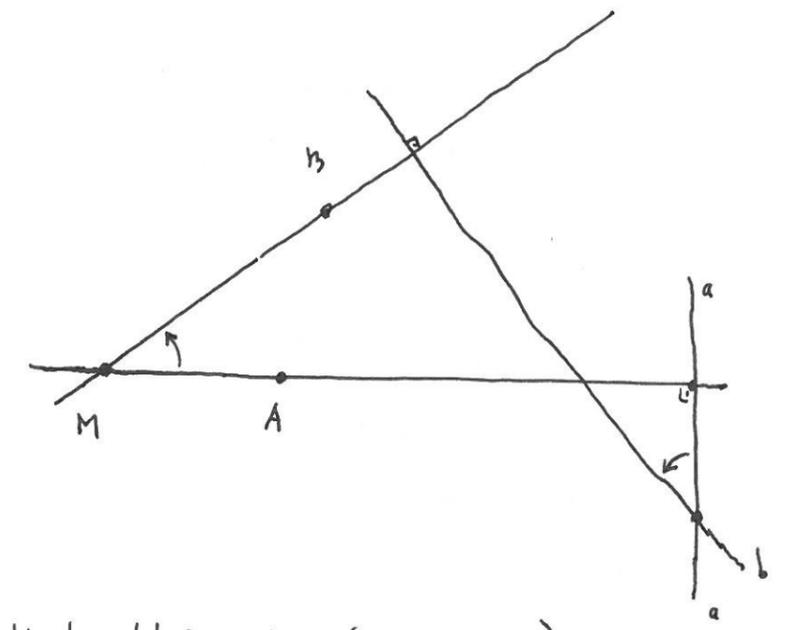
b n basit neticenin ehemmiyetini mübalağa etmek mümkün değildir ! Bir çevirtim altında noktadaş doğrular doğruduş noktalara, doğruduş noktalar da, noktadaş (ya da paralel !) doğrulara dönüşürler !

Bu suretle artık , sadece "üzerindelik münasebetlerine matuf teoremlerin (Desargues & Pappos teoremleri gibi!) çevirtik "dual" şekillerinin kendiliğinden elde olacağı aşikardır!

§ 50. $\mathcal{C}_{ev, M, k}$ altında

$$\angle (MA, Mb) = \angle (a, b)$$

Bu harikulade mühim neticenin ispata adeta ihtiyacı yok!



§ 51. Aynı evirtimde olduğu gibi (sayfa 48!) ananevi olarak - gene sezgiye çok yardımcı bir anane olarak! - M noktası (yani "çevirtim merkezi") de $\mathcal{C}_{ev, M, k}$ nin tanım bölgesine dahil edilir. Bu "tamamlama" işlemi $\sqrt{\text{bu çevirtim}}$ altında M nin görüntüsü olabilecek bir "sonsuzdaki doğru" l_∞ katilmasını gerektirir. O zaman da l_∞ un "üzerinde her biri $\wedge M$ den geçen birer doğru olan noktalar $\mathcal{C}_{ev, M, k}$ altında bulunmalıdır. Bu noktalar da

...
...
...

...
...
...

...
...
...

(A)P & (A)P
...
...



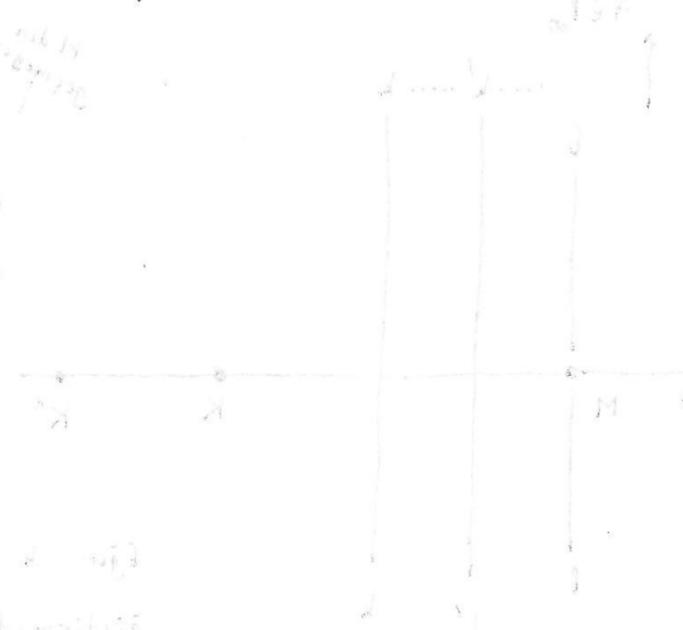
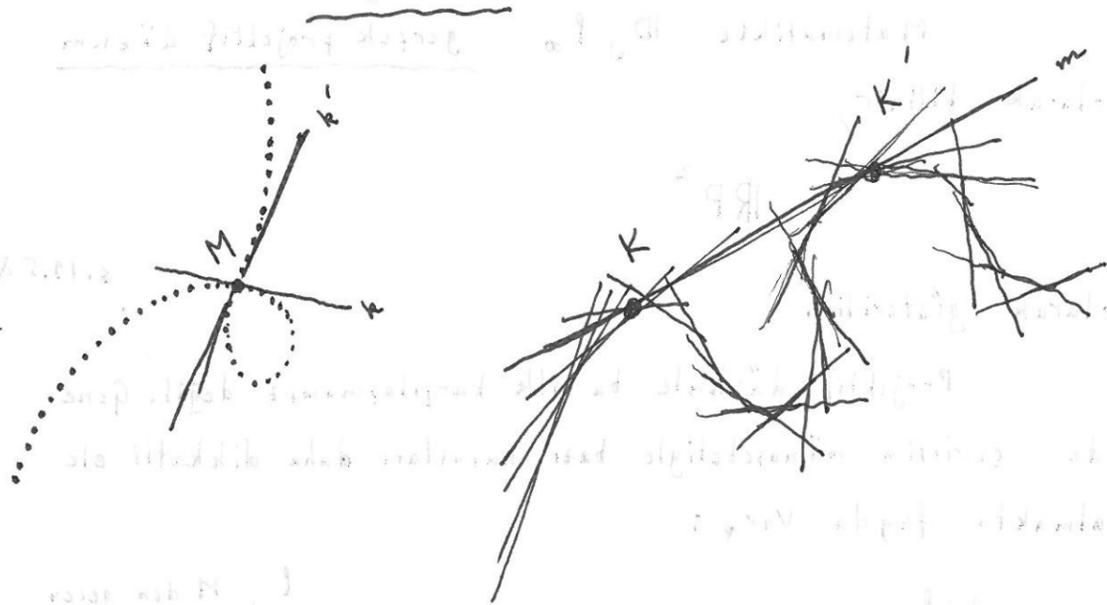
...
...
...
...
...

...
...
...
...
...

"Geometrik yer" ve "zarf"

! olarak

eğriler ...



Gene dikkatle ele alınmaya değer bir nokta:
 K, K' noktaları verildiğinde, ~~KK'~~ KK' doğrusunun M den geçmesi için gerek ve yeter şart $k // k'$ olmasıdır!

§52.

Çevirtimin diğer bir mühim vechesi de koni kesitlerini çembere dönüştürmesidir. (Yani geometrik yer ya da zarf olan koni kesitlerini - sırasıyla zarf ya da geometrik yer olan çemberlere dönüştürüyor.)

Teorem : Merkezi D ve yarıçapı r olan bir γ çemberi alalım. F herhangi bir nokta olsun. Gelişigüzel bir $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ için $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{ev, M, k}$ yi gözönüne alalım.

[1] $F = D$ ise γ nin teğetlerinin kutuplarının \mathcal{C} altında geometrik yeri D merkezli ve $|k|/r$ yarıçaplı bir çembirdir.

[2] $F \neq D$ ise γ nin teğetlerinin kutuplarının geometrik yeri odağı F , doğrultmanı d ve eksantrisitesi $\epsilon = |FD|/r$ olan bir koni kesitidir.

(Kısaca : \mathcal{C} "görüntü" $F = D$ - yani $\epsilon = 0!$ - ise bir çember

F, γ nin $\left\{ \begin{array}{l} \text{içindeyse} \\ \text{dışındaysa} \\ \text{üstündeyse} \end{array} \right\}$ bir $\left\{ \begin{array}{l} \text{elips} \\ \text{hiperbol} \\ \text{parabol} \end{array} \right\}$ dir.

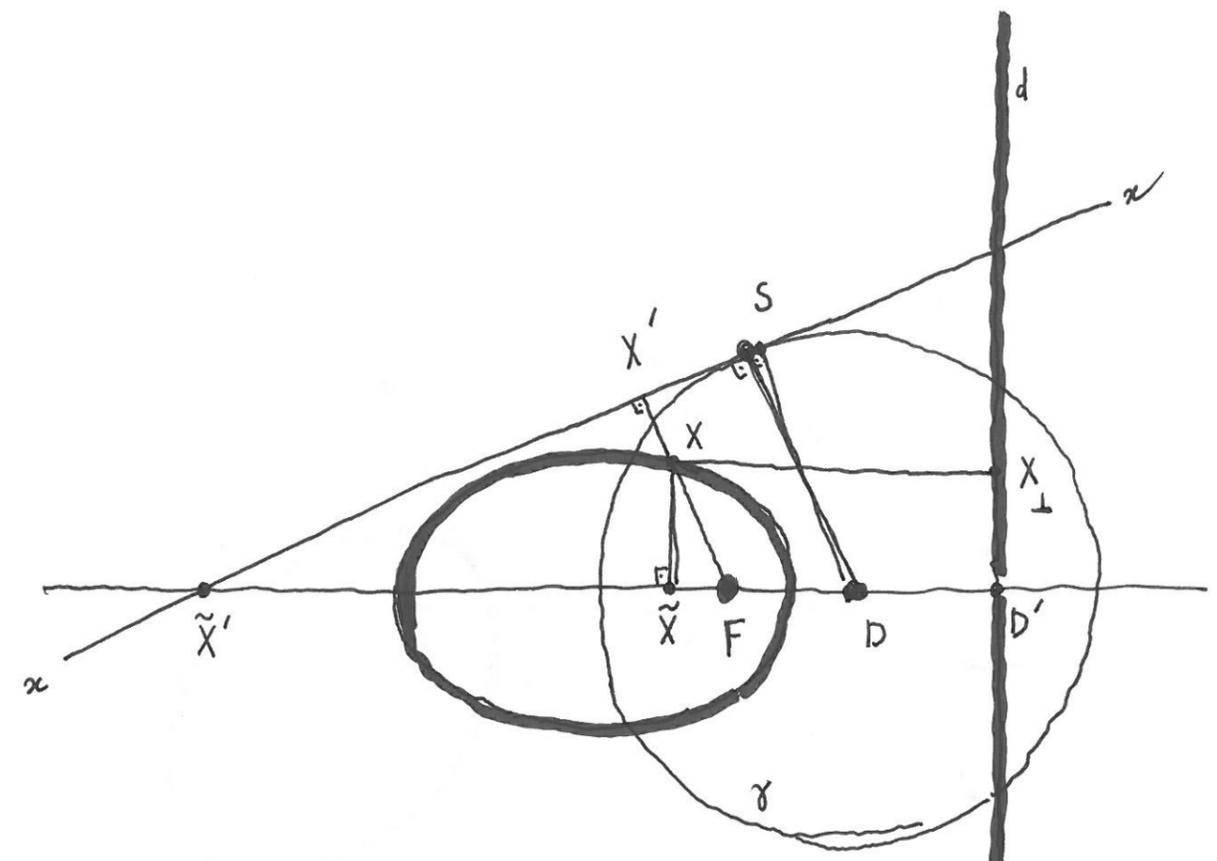
Handwritten notes on the left page, including a diagram of a circle with points X, F, D, X', and X' on the horizontal axis. A vertical line d is shown to the right. A point S is marked above the circle. A thick oval highlights the region between X and F.

Handwritten notes in the middle section of the left page, containing some mathematical expressions and definitions.

Handwritten notes in the lower middle section of the left page, including a list of points and their relationships.

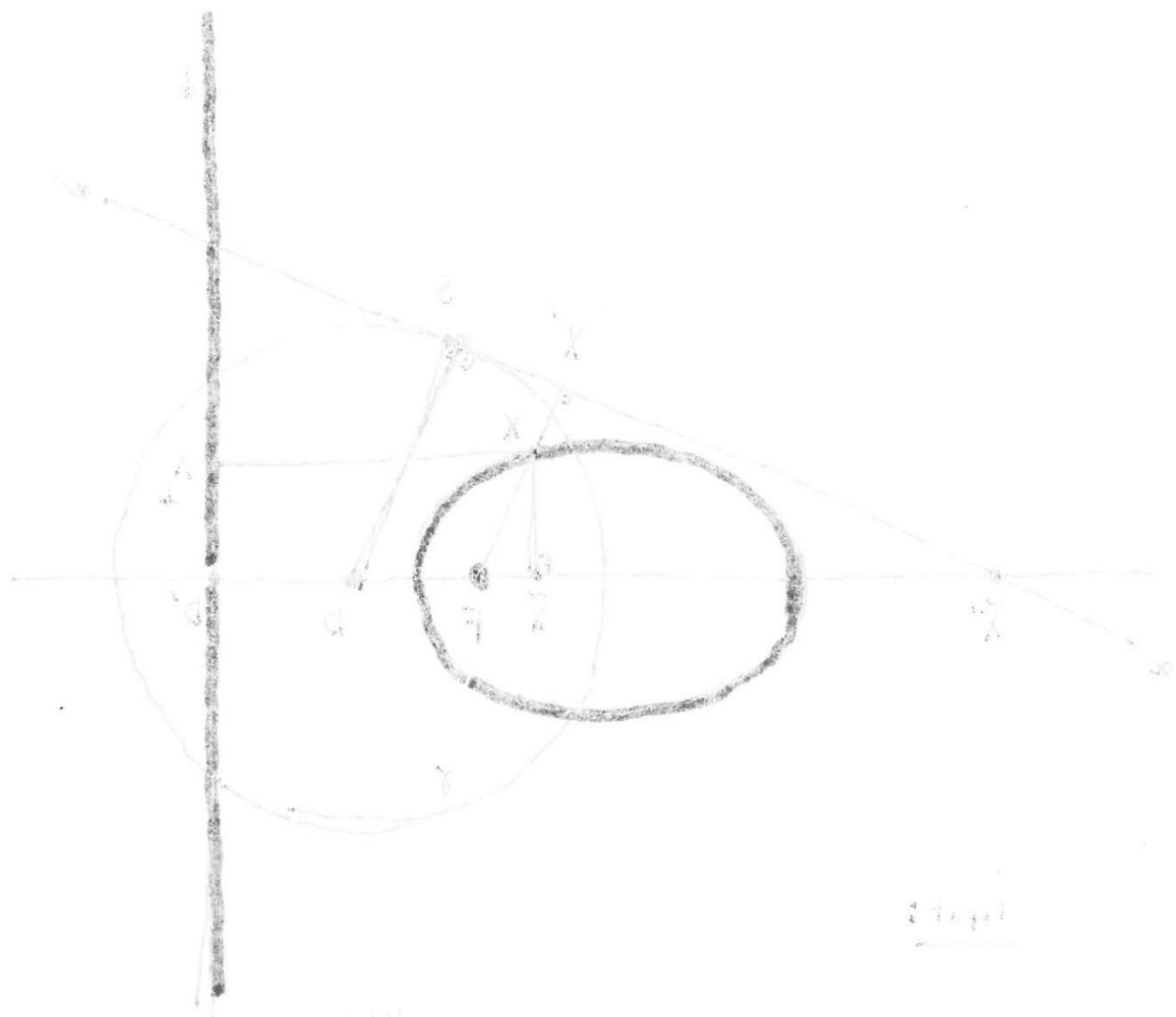
Handwritten notes in the lower section of the left page, including a diagram of a circle with points X, F, D, X', and X' on the horizontal axis. A vertical line d is shown to the right. A point S is marked above the circle. A thick oval highlights the region between X and F.

Handwritten notes at the bottom of the left page, including a list of points and their relationships.



Isparat:

$$\begin{aligned} \frac{|XF|}{|XX_{\perp}|} &= \frac{|XF|}{|\tilde{X}D'|} = \frac{|FX|}{|\tilde{X}F| + |FD'|} = \frac{|k|/|FX'|}{|k|/|\tilde{X}F| + |k|/|FD|} \\ &= \frac{|FX'| \cdot |FD|}{|FX'| (|\tilde{X}F| + |FD|)} \\ &= \frac{|FX'| \cdot |FD|}{|FX'| |\tilde{X}'D|} \\ &\stackrel{FX'X' \approx D\tilde{X}'S}{=} \frac{|D\tilde{X}'| \cdot |FD|}{|DS| \cdot |\tilde{X}'D|} = \frac{|FD|}{r} \end{aligned}$$



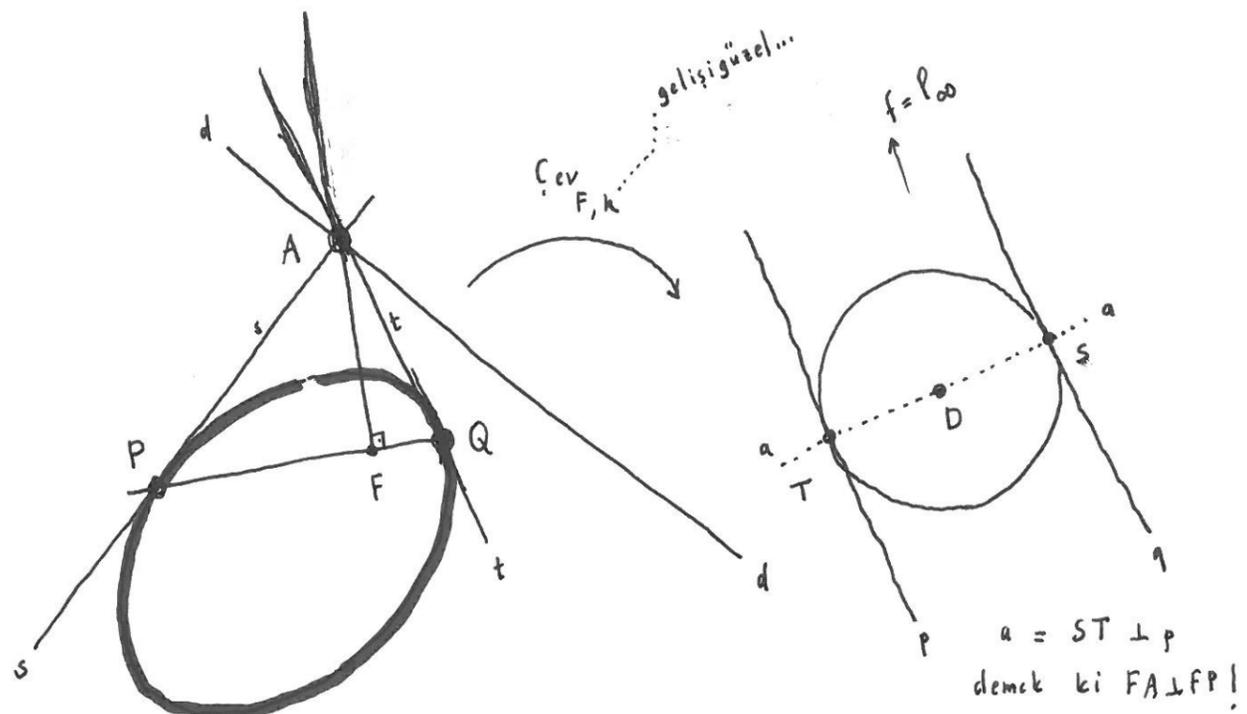
$$\frac{|x_1|}{|x_2|} = \frac{|x_3|}{|x_4|} = \frac{|x_5|}{|x_6|} = \frac{|x_7|}{|x_8|}$$

$$\frac{|x_1|}{|x_2|} = \frac{|x_3|}{|x_4|} = \frac{|x_5|}{|x_6|} = \frac{|x_7|}{|x_8|}$$

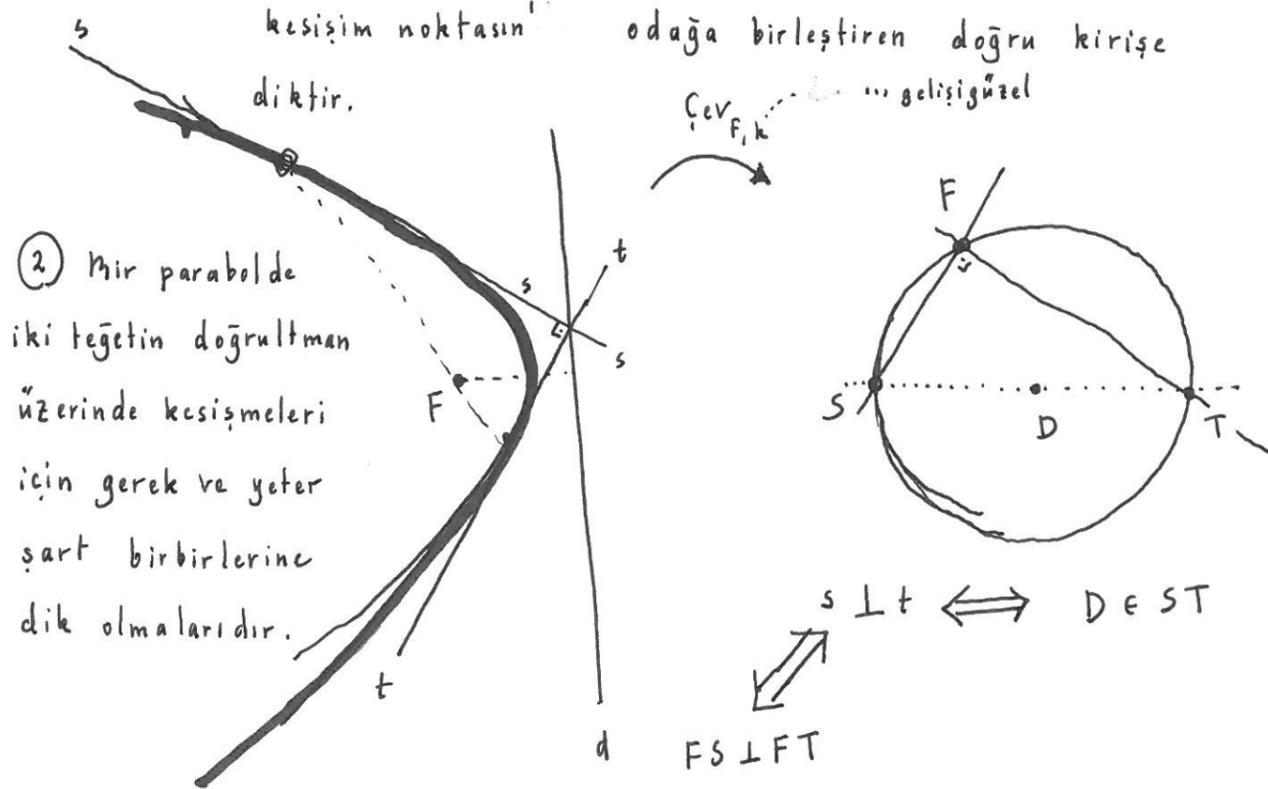
$$\frac{|x_1|}{|x_2|} = \frac{|x_3|}{|x_4|} = \frac{|x_5|}{|x_6|} = \frac{|x_7|}{|x_8|}$$

$$\frac{|x_1|}{|x_2|} = \frac{|x_3|}{|x_4|} = \frac{|x_5|}{|x_6|} = \frac{|x_7|}{|x_8|}$$

§53. Tatbikat :



① Mir koni kesitinde odaktan geçen ^{bir} kirişin uç noktalarından çizilen teğetler doğrultman üzerinde kesişir ve bu kesişim noktası' odağa birleştiren doğru kirişe diktir.

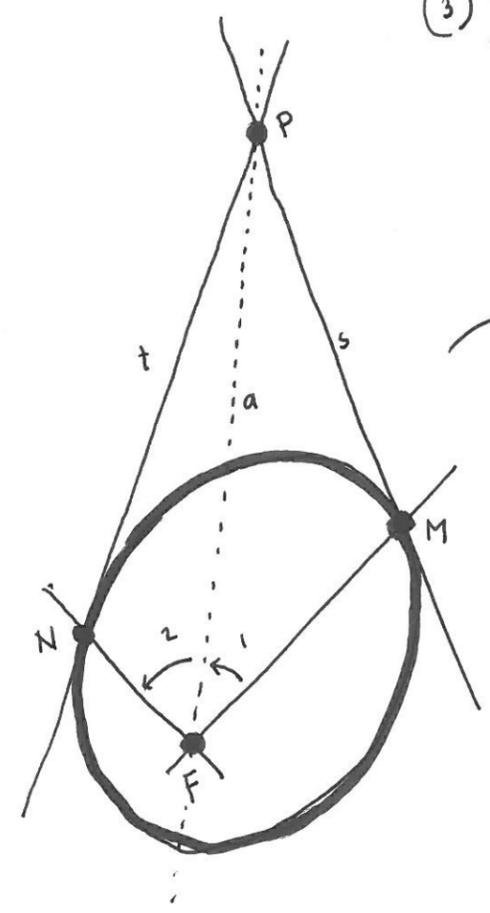


② Mir parabolde iki teğetin doğrultman üzerinde kesişmeleri için gerek ve yeter şart birbirlerine dik olmalarıdır.

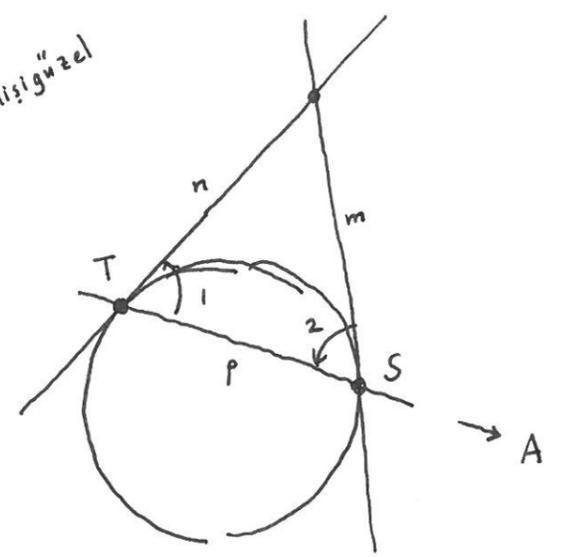
$$s \perp t \iff D \in ST$$

$$FS \perp FT$$

③ İkinci Poncelet teoremi



Cev. F, A gelişigüzel



$$\angle(m, P) = \angle(P, n)$$

$$\downarrow$$

$$\angle(FM, FP) = \angle(FP, FN)$$