Hausdorff boyutu: Örnekler ve teknikler

Kemal Ilgar Eroğlu (İstanbul Bilgi Üniversitesi)

Bu metin, 19–23 Haziran 2017 tarihlerinde Çakılarası Matematik Köyü'nde verilen aynı başlıklı dersin notlarından oluşmaktadır. Bu notların hazırlanmasında, ilk dört bölümüm kimi yerlerinde Mattila'nın [2] kitabından yararlanılmıştır. Bernoulli konvolüsyonları ve bahsedilen afin sisteme uygulaması hakkındaki teknikler ise [6] ve [4] makalelerinden derlenmiştir.

1 Hausdorff ölçüsünün tanımı

Önce $s \geq 0$ ve $\delta > 0$ için s boyutlu δ-önölçüyü tanımlayalım:

Tanım 1. $s \geq 0$, $\delta > 0$ ve $A \subseteq \mathbb{R}^d$ olsun. O halde

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) := \inf \left\{ \sum |E_i|^s : A \subseteq \bigcup_i E_i \text{ ve her } i \text{ için } |E_i| \leq \delta \right\}, \tag{1}$$

burada infimum tüm sayılabilir δ-örtüler üzerinden alınmaktadır.

Dikkat edilirse $\mathcal{H}^s_\delta$ bir ölçüdür ama bir Borel ölçüsü değildir:

Örnek 2. $d = 2$, $s = \delta = 1$ ve A kümesini 1 birim çaplı bir kapalı top alalım. A'nın içini U ve topolojik sınırını S ile gösterirsek $A = U \sqcup S$ olur ve her üç küme de Borel'dir. Örtü olarak $\{A\}$ alarak hemen

$$\mathcal{H}^1_1(U), \mathcal{H}^1_1(S) \leq \mathcal{H}^1_1(A) \leq 1$$

olduğunu görebiliriz. Öte yandan π ile x eksenine izdüşümü gösterirsek, her E kümesi için $|E| \geq |\pi E|$ olduğundan, U'nun herhangi bir $\{E_i\}$ örtüsü için

$$\sum_i |E_i| \geq \sum_i |\pi E_i| \geq 1$$

olmalıdır, bu son eşitsizlik, izdüşümlerin 1 uzunluğunda bir aralığı örtmek zorunda olmasından ileri gelir. Bu da $\mathcal{H}^1_1(U) \geq 1$ alt sınırını verir. Aynı argümanlarla

$$\mathcal{H}^1_1(U) = \mathcal{H}^1_1(S) = \mathcal{H}^1_1(A) = 1$$

elde ederiz ki $A = U \sqcup S$ olduğundan $\mathcal{H}^1_1$'in Borel kümelerinde ölçü gibi davranmadığını görmüş oluruz.

Buradaki sorun, $\mathcal{H}^s_\delta$ dış ölçüsünün çapı $\leq \delta$ olan kümeleri ayırmakta yetersiz kalmasıdır. Sezgisel olarak $\delta \to 0$ iken davranışının bir metrik dış ölçününkine, dolayısıyla bir Borel ölçüsününkine dönüşmesi beklenir. Dikkat edilirse (1) ifadesi δ'ya göre azalmayan şekilde monotondur, dolayısıyla

$$\mathcal{H}^s(A) := \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(A) \tag{2}$$

limiti iyi tanımlıdır.

Teorem 3. *$\mathcal{H}^s$ bir Borel ölçüsüdür.*

Kanıt. $\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$ olduğu ve monotonluk kolayca görülür. Her $\delta > 0$ için

$$\mathcal{H}^s_\delta(\bigcup A_n) \leq \sum_n \mathcal{H}^s_\delta(A_n) \leq \sum_n \mathcal{H}^s(A_n)$$

olduğundan $\delta \to 0$ ile sayılabilir alttoplanabilirlik de kanıtlanmış olur, dolayısıyla $\mathcal{H}^s$ bir ölçüdür. Borel olduğunu göstermek için metrik olduğunu göstermek yeterlidir: Şimdi aralarındaki uzaklık $\varepsilon > 0$ olan birer A ve B kümesi alalım. Her $\delta < \varepsilon$ için, $A \cup B$ birleşimini örten her δ-örtüsünde, örtüyü oluşturan kümeler bu iki kümenin en çok birisi ile kesişebilir. Böylece birleşimin her δ-örtüsü, A ve B'nin birer (ayrık) δ-örtüsünün birleşimi olarak yazılabilir. Bu bize $\delta < \varepsilon$ için

$$\mathcal{H}^s_\delta(A \cup B) = \mathcal{H}^s_\delta(A) + \mathcal{H}^s_\delta(B)$$

verir ve $\delta \to 0$ ile aynı eşitlik $\mathcal{H}^s$ için elde edilir. Böylece $\mathcal{H}^s$ metrik ve Borel olur.

Birkaç noktaya değinelim: □

- Hausdorff ölçüsünün $\mathbb{R}^d$ dışında herhangi bir metrik uzayda da tanımlanabileceğine dikkat ediniz. Her ne kadar gösterimimizde açıkça yer almasa da, $\mathcal{H}^s$'in anlamlandırılabilmesi için hangi uzayda çalışıldığının biliniyor olması gerekir. Bu metinde, aksi belirtilmedikçe çalıştığımız uzayın $\mathbb{R}^d$ olduğunu varsayacağız.
- (1)'deki örtülerin konveks ve kapalı kümelerden oluşmasını istersek denk bir tanım elde ederiz.
- $d = 1$ durumunda $\mathcal{H}^1$ ölçüsünün $\mathcal{L}$ Lebesgue ölçüsü olduğu kolayca görülebilir. Genel olarak $\mathbb{R}^d$ üzerindeki $\mathcal{H}^d$ ölçüsü, $\mathcal{L}^d$'nin bir skaler katıdır.

Örnek 4. $\mathbb{R}^d$ içinde L uzunluğunda bir doğru parçası alırsak, bu parçayı kendisinin örtüsü olarak kullanarak $\mathcal{H}^1$ ölçüsünün en çok L olması gerektiğini görebiliriz. Öte yandan yukarıdakine benzer argümanlarla, herhangi bir örtü için kümelerin çapları toplamının ne azından L olması gerektiği çıkar, yani L uzunluğundaki doğru parçasının $\mathcal{H}^1$ ölçüsü tam olarak L olmalıdır.

Örnek 5. Önceki örnekten devamla, eğer $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^d$ birebir ve C^1 ise ve $\Gamma = \gamma([0,1])$ dersek, Γ kümesini standart yaklaştırma argümanları ile doğru parçalarının yanyana gelmesi ile oluşmuş gibi düşünebiliriz ve $\mathcal{H}^1(\Gamma) = \int_0^1 |\gamma'| = \ell(\gamma)$ olduğu görülür.

Şimdi sabit bir $A \subseteq \mathbb{R}^d$ kümesi için $\mathcal{H}^s(A)$ ölçüsünün s ile nasıl değiştiğine bakalım:

Lemma 6. *$A \subseteq \mathbb{R}^d$ ve $s > t$ olsun.*

1. *Eğer $\mathcal{H}^s(A) > 0$ ise $\mathcal{H}^t(A) = \infty$ olur.*
2. *Eğer $\mathcal{H}^t(A) < \infty$ ise $\mathcal{H}^s(A) = 0$ olur.*

Kanıt. Sadece ilk kısmı kanıtlayacağız, diğeri benzerdir. $s = t + \varepsilon$ yazalım. $1 > \delta > 0$ ve$\{E_i\}$ örtüsü A kümesi için herhangi bir δ-örtüsü olsun. Bu durumda

$$\sum_i |E_i|^t = \sum_i |E_i|^{s-\varepsilon} \geq \delta^{-\varepsilon} \sum_i |E_i|^s \geq \delta^{-\varepsilon} \mathcal{H}^s_\delta(A)$$

olur ve bu bize $\mathcal{H}^t_\delta(A) \geq \delta^{-\varepsilon}\mathcal{H}^s_\delta(A)$ verir. Şimdi $\delta \to 0$ ile istenen sonuç gelir. □

Bu sonuç bize sabit bir A kümesi için t değeri arttıkça, $\mathcal{H}^t(A)$ değerinde sonsuzdan sıfıra ani bir düşüşün gerçekleştiği bir kırılma noktası olduğunu söyler. Kolayca görüleceği üzere, her $\varepsilon > 0$ için $\mathcal{H}^{d+\varepsilon}(\mathbb{R}^d) = 0$ olduğundan bu kırılma değeri en çok d olabilir. O halde şu sonuca varabiliriz:

Sonuç 7. *$A \subseteq \mathbb{R}^d$ olsun. Bu durumda*

$$\sup\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(A) > 0\} = \inf\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(A) = 0\}. \qquad (3)$$

Burada $\sup\emptyset := 0$ ve $\inf\emptyset := d$ olarak yorumlanacaktır.

Tanım 8. Yukarıdaki (3) ifadesindeki ortak değere A kümesinin Hausdorff boyutu denir ve $\dim A$ (veya $\dim_H A$) ile gösterilir.

Bir A kümesi ve $s = \dim A$ için $\mathcal{H}^s(A)$ değeri $[0, \infty]$ aralığından herhangi bir değer olabilir, bu durumun örneklerini göreceğiz. Hemen şu gözlemde bulunabiliriz:

Olgu 9. *Bir s değeri için $0 < \mathcal{H}^s(A) < \infty$ ise $\dim A = s$.*

Örneklere geçmeden önce Hausdorff ölçü ve boyutunu bulmamıza yardımcı birkaç sonuca değinelim:

Teorem 10. *$A, A_1, A_2, \ldots \subseteq \mathbb{R}^d$ olsun.*

1. *$f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ bir L-Lipschitz dönüşüm ise $\mathcal{H}^s(f(A)) \leq L^s\mathcal{H}^s(A)$ olur. Buradaki her bir Hausdorff ölçüsü ilgili uzay üzerinde alınacaktır.*
2. *$\mathbb{R}^d$'deki bir kümenin herhangi bir boyuttaki Hausdorff ölçüsü izometriler ve ötelemeler altında değişmez.*
3. *$\dim(\bigcup_n A_n) = \sup_n \dim A_n$.*

Kanıt. İlk madde için, A kümesinin verilen herhangi bir $\{E_i\}$ δ-örtüsünden, $f(A)$ kümesi için $\{f(E_i)\}$ $(L\delta)$-örtüsünü elde edebileceğimizi görelim. Şimdi $|f(E_i)| \leq L|E_i|$ olmasından kolayca

$$\mathcal{H}^s_{L\delta}(f(A)) \leq \sum_i |f(E_i)|^s \leq L^s \sum_i |E_i|^s$$

ve infimum yoluyla $\mathcal{H}^s_{L\delta}(f(A)) \leq L^s\mathcal{H}^s_\delta(A)$ elde edilir. $\delta \to 0$ limiti ile sonuç gelir. İkinci kısmı alıştırma olarak bırakıyoruz. Son maddede ise, monotonluktan her bir s ve n için, $A := \bigcup_n A_n$ yazarak

$$\mathcal{H}^s(A) \geq \mathcal{H}^s(A_n)$$

gelir, bu ise (3) tanımı hatırlandığında $\dim A \geq \dim A_n$ verir. Dolayısıyla $\dim A \geq \dim \sup_n A_n$ olur. Diğer yön içinse $s = \sup_n \dim A_n$ diyelim ve $\varepsilon > 0$ rastgele verilsin. Her bir n için $\mathcal{H}^{s+\varepsilon}(A_n) = 0$ olacağından $\mathcal{H}^{s+\varepsilon}(A) = 0$ elde edilir. Bu her $\varepsilon > 0$ için doğru olduğundan, yine tanım gereği $\dim A \leq s$ olmak zorundadır, dolayısıyla $\dim A = s$. □

Yukarıdaki teoremin üçüncü kısmı, Hausdorff boyutunu, Minkowski (kutu) boyutu gibi diğer bazı yaygın kullanılan boyut türlerine göre daha iyi davranışlı yaptığına dikkat çekiyoruz. İlk kısmının bir sonucu olarak da, Lipschitz dönüşümler altında Hausdorff boyutunun artmadığı görülebilir.

Örnek 11. A tekil bir nokta ise her $s > 0$ için $\mathcal{H}^s(A) = 0$ ve $\mathcal{H}^0(A) = 1$ olduğu görülür. Kısacası, $\mathcal{H}^0$ sayma ölçüsüdür ve sayılabilir çokluktaki her küme de 0 boyutludur.

Örnek 12. $s > d$ ise $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d) = 0$. Dolayısı ile $\mathbb{R}^d$'de bir kümenin Hausdorff boyutu en fazla d olabilir. Bunu görebilmek için $A := [0,1]^d$ kümesinin $\mathcal{H}^s$ ölçüsünün 0 olduğunu görmek yeterlidir. Bu küme çapı $\sqrt{d}n^{-1}$ olan n^d altkübe bölünebilir, bu örtüyle $\sum |E_i|^s = Cn^{d-s}$ olur ve $n \to \infty$ ile $\mathcal{H}^s(A) = 0$ gelir.

Örnek 13. $\mathbb{R}$'deki klasik Cantor kümesi C olsun. Her k için 2^k tane 3^{-k} uzunluğunda aralıktan oluşan örtü ile, $s = \frac{\ln 2}{\ln 3}$ için $\mathcal{H}^s_{3^{-k}}(C) \leq 1$ gelir ki bu da $\mathcal{H}^s(C) \leq 1$ verir. Öte yandan burada eşitlik olduğu görülebilir: Bize bir $\{E_i\}$ δ-örtüsü verildiğinde, biraz şişirme ile GBK örtünün sonlu olduğunu ve her bir E_i'nin C'nin kurulumunda aynı düzeyde olması şart olmayan birer I_i ve J_i aralığını içeren en küçük kapalı aralık olduğunu varsayabiliriz. Şimdi $x \mapsto x^s$ fonksiyonunun konkavlığı bize $|E_i|^s \geq |I_i|^s + |J_i|^s$ verir. Demek ki E_i yerine I_i ve J_i almak daha iyi bir örtü verir. Bu şekilde değiştirmelerle sonlu adımda $\{E_i\}$ örtüsünü, aynı bir k düzeyinin aralıklarından oluşan örtüyle değiştirebiliriz ve böylece

$$\sum_i |E_i|^s \geq 2^k(3^{-k})^s = 1$$

olur; bu da $\mathcal{H}^s(C) = 1$ ve dolayısıyla $\dim C = s = \frac{\ln 2}{\ln 3}$ verir.

Bir kümenin belli bir boyuttaki Hausdorff ölçüsünü tam olarak hesaplamak zor olabilir ama Olgu 9'da olduğu gibi boyutun ne olduğunu belirlemek için ölçünün tam olarak ne olduğunu bilmek gerekmez.

Örnek 14. Düzlemdeki (1/4'er oranlı) 4-köşe Cantor kümesine K diyelim. Her bir k için 4^k tane $\sqrt{2}4^{-k}$ çaplı kareyle örtü alarak $\mathcal{H}^1(K) < \infty$ elde ederiz. Öte yandan uygun bir π izdüşümü için πK bir aralık ve $\mathcal{H}^1(K) \geq \mathcal{H}^1(\pi K) = \mathcal{L}(\pi K) > 0$ olduğundan $\dim K = 1$ elde ederiz.

2 Borel ölçüleri ile Hausdorff boyutunu belirleme, fraktal kümeler

Gördüğümüz gibi, bir kümenin Hausdorff boyutunu belirleyebilmek ya da hiç olmazsa alttan/üstten sınırlayabilmek için bir s değeri için $\mathcal{H}^s(A)$'nın pozitif/sonlu olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için kullanışlı teoremlerden birisi şudur:

Teorem 15. *$A \subseteq \mathbb{R}^d$ bir Borel kümesi, μ sonlu bir Borel ölçüsü ve $0 < c < \infty$ olsun.*

1. *Eğer her $x \in A$ için $\limsup_{r\to 0} \frac{\mu(B(x,r))}{r^s} \leq c$ ise $\mathcal{H}^s(A) \geq \frac{1}{c}\mu(A)$.*
2. *Eğer her $x \in A$ için $\limsup_{r\to 0} \frac{\mu(B(x,r))}{r^s} \geq c$ ise $\mathcal{H}^s(A) \leq \frac{10^s}{c}\mu(\mathbb{R}^d)$.*

Bu teorem kolayca şu sonucu verir:

Sonuç 16. *A ve μ yukarıdaki gibi olsun.*

1. *Eğer $\mu(A) > 0$ ve μ-hemen her $x \in A$ için $\liminf_{r\to 0} \frac{\ln \mu(B(x,r))}{\ln r} \geq s$ ise $\dim A \geq s$.*
2. *Eğer her $x \in A$ için $\liminf_{r\to 0} \frac{\ln \mu(B(x,r))}{\ln r} \leq s$ ise $\dim A \leq s$.*

Teorem 15'in kanıtı için Vitali Örtü Teoremi'ni hatırlayalım:

Teorem 17 (Vitali Örtü Teoremi)**.** *$\mathcal{F}$, $\mathbb{R}^d$'de sınırlı bir bölgede kalan bir kapalı top ailesi ise, o zaman onun öyle bir sayılabilir ve ayrık $\{B_i\}$ altailesi vardır ki $\bigcup \mathcal{F} \subseteq \bigcup 5B_i$. Burada $5B_i$, B_i ile eşmerkezli ve 5 kat yarıçapa sahip topu göstermektedir.*

Teorem 15'nin kanıtı. (1) Herhangi bir $c' > c$ ve $\delta > 0$ alalım ve A_δ ile

$$\{x \in A : \forall r < \delta \quad \mu(B(x,r)) < c'r^s\}$$

kümesini gösterelim. Bu küme bir Borel kümesidir ve dikkat edilirse $\delta \to 0$ iken $A_\delta \nearrow A$. Herhangi bir $\delta' < \delta$ ve A_δ'ın herhangi bir $\{E_i\}$ δ'-örtüsü için her E_i kümesini (GBK $E_i \cap A \neq \emptyset$) $x_i \in A$ ve $r_i = |E_i|$ olacak şekilde bir $B_i := B(x_i, r_i)$ içine koyabiliriz. Bu durumda

$$\sum |E_i|^s = \sum |B_i|^s \geq \frac{1}{c'} \sum \mu B_i \geq \frac{1}{c'}\mu A_\delta$$

olur. Buradan inf alarak $\mathcal{H}^s_{\delta'}(A_\delta) \geq (1/c')\mu A_\delta$ ve önce $\delta' \to 0$, sonra $c' \searrow c$ ve $\delta \to 0$ ile istenen elde edilir.

(2) içinse savı her sınırlı A kümesi için kanıtlamak yeterlidir. Yine $c' < c$ rastgele olsun ve $\delta > 0$ için

$$\mathcal{F}_\delta = \{B(x,r) : x \in A,\, r < \delta \text{ ve } \mu(B(x,r)) \geq c'r^s\}$$

top ailesi olsun. Şimdi Vitali Teoremi'ni kullanarak ayrık bir $\{B_i\}$ alt ailesi alalım. Bu durumda $\bigcup 5B_i \supseteq \bigcup \mathcal{F}_\delta \supseteq A$ ve

$$\sum |5B_i|^s = 10^s \sum r_i^s \leq \frac{1}{c'} \sum \mu B_i = \frac{1}{c'}\mu\left(\bigcup B_i\right) \leq \frac{\mu(\mathbb{R}^d)}{c'}.$$

Buradan $\mathcal{H}^s_{5\delta}(A) \leq (10^s/c')\mu(\mathbb{R}^d)$ ve $\delta \to 0$ ile sonuç gelir. □

Açıklama 18. Daha dikkatli bir kanıtla yukarıda 10^s yerine 2^s alınabilir.

Bu sonuçla daha önce irdelediğimiz fraktal tipindeki kümelerde boyut bulmak için kullanabileceğimiz bir ölçüt elde edeceğiz. Önce arkaplanı verelim:

Tanım 19. Her biri $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ ve Lipschitz sabiti 1'den küçük Lipschitz dönüşümü yani büzüşme olan, sonlu tane fonksiyonu içeren bir $\{F_1, \ldots, F_m\}$ topluluğuna bir tekrarlı fonksiyon sistemi (TFS) denir.

Banach Sabit Nokta Teoremi'nin en ünlü uygulamalarından biri bize aşağıdaki teoremi verir:

Teorem 20. *Eğer $\{F_1, \ldots, F_m\}$ bir TFS ise, boştan farklı ve*

$$K = \bigcup_{i=1}^m F_i(K)$$

koşulunu sağlayan biricik bir K kompakt kümesi vardır.

Bu K kümesine sistemin atraktörü denir. TFS'deki fonksiyonların her biri birer benzerlik (veya afin) dönüşüm ise bu K kümesine de özbenzeşik (veya özafin) denir. Benzerlik dönüşümü ile

$$\forall x, y \qquad |F(x) - F(y)| = r|x - y|$$

olacak şekilde bir r sayısının varlığı anlaşılmaktadır. F yukarıdaki gibi bir benzerlik dönüşümü ise her A ve s için Teorem 10 ile $\mathcal{H}^s(F(A)) = r^s\mathcal{H}^s(A)$ olduğu görülebilir. Dolayısıyla TFS benzerliklerden oluşuyor ise ve $F_i(K)$ kümeleri ayrık ise

$$\mathcal{H}^s(K) = \mathcal{H}^s(K)\sum_{i=1}^m r_i^s$$

sağlanır ki, eğer $s = \dim K$ için $0 < \mathcal{H}^s(K) < \infty$ ise $\sum_i r_i^s = 1$ koşulu sağlanmak zorunda olur. Bu koşulu sağlayan biricik s değerine sistemin benzerlik boyutu denir ve görüldüğü üzere $F_i(K)$ parçalarının ayrık (ya da "neredeyse ayrık") olduğu durumda K'nın Hausdorff boyutu olmaya en doğal adaydır. Bunun böyle olduğunu birazdan göreceğiz.

Şimdi benzerliklerden oluşan sistemlere odaklanıyoruz:

Tanım 21. $\{F_1, \ldots, F_m\}$ TFS benzerliklerden oluşsun ve atraktörü K olsun. Eğer $F_i(K)$ kümeleri ayrıksa sistem Güçlü Ayrıklık Koşulunu (GAK) sağlıyor denir. Eğer boştan farklı ve sınırlı bir V açık kümesi, $F_i(V)$ görüntüleri ayrık ve

$$\bigcup_{i=1}^m F_i(V) \subseteq V$$

olacak şekilde bulunabiliyorsa, sistem Açık Küme Koşulu'nu (AKK) sağlıyor denir.

Elbette GAK $\Longrightarrow$ AKK ancak tersi doğru olmak zorunda değildir. Daha önce gördüğümüz klasik ve 4-köşe Cantor kümeleri GAK'nu sağlarken, Sierpinski süzgeci ise yalnızca AKK'nu sağlar.

Birkaç gösterim belirleyelim: $\Omega := \{1, \ldots, m\}^{\mathbb{N}}$ bizim sembol dizileri (adres) uzayımız olacak ve bu uzaydan K kümesine "izdüşüm" dönüşümünü

$$\pi(\omega) = \lim_{l\to\infty} F_{\omega_1\cdots\omega_l}(K)$$

olarak tanımlayacağız. Burada $\omega = (\omega_1\omega_2\cdots)$ varsayıyoruz. Sonlu sembol dizilerine kelime dersek ve bunu Ω^* ile gösterirsek, bir $\tau = (\tau_1 \cdots \tau_k)$ kelimesi için de

$$F_\tau := F_{\tau_1} \circ \cdots \circ F_{\tau_k}$$

olarak tanımlıyoruz. Bu π dönüşümünü K'nın her noktası için bir adres kodlama olarak düşünebiliriz. GAK durumunda π birebir olacaktır. Bir τ kelimesi için de bu kelimenin uzunluğunu $|\tau|$ ve $F_\tau(K)$ kümesini K_τ ile gösterelim. Son olarak, k uzunluğundaki bir τ kelimesi için F_τ dönüşümünün büzüşme oranını da

$$r_\tau := r_{\tau_1} r_{\tau_2} \cdots r_{\tau_{|\tau|}}$$

olarak yazalım. Bu bölümün (ilk olarak [1]'de kanıtlanan) ana sonucu yazmaya hazırız:

Teorem 22. *Benzerliklerden oluşan bir $\{F_1, \ldots, F_m\}$ sisteminin benzerlik boyutu s ve atraktörü K olsun. Aşağıdakiler birbirine denktir:*

1. *Bu sistem AKK'nu sağlar.*
2. *Öyle bir $\varepsilon > 0$ vardır ki, herhangi iki uyumsuz, yani biri diğerinin başlangıcı olmayan τ ve σ kelimeleri için $\|F_\tau^{-1} \circ F_\sigma - id\| > \varepsilon$ sağlanır (burada afin dönüşüm normu ya da lineer kısmın normu kullanılabilir, hepsi eşdeğerdir).*
3. *$0 < \mathcal{H}^s(K) < \infty$.*

Kanıt. Kanıtın ana hatlarını vereceğiz. GBK $|K| = 1$ olduğunu varsayacağız. (1) $\Longrightarrow$ (2) için: Eğer V AKK'ndaki küme ise, uyumsuz τ ve σ kelimeleri için $F_\tau(V) \cap F_\sigma(V) = \emptyset$ yani $F_\tau^{-1} \circ F_\sigma(V) \cap V = \emptyset$ olmalıdır. V açık olduğu için, özdeşliğe yeterince yakın tüm F afin dönüşümleri için $F(V) \cap V \neq \emptyset$ olduğundan savdaki gibi bir $\varepsilon > 0$ olmalıdır.

(2) $\Longrightarrow$ (3): Adres uzayımızda τ kelimesi ile başlayan elemanlar kümesini (silindir) $[\tau]$ ile gösterelim. Ω üzerinde

$$\forall \tau \in \Omega^* \qquad \mu[\tau] = r_\tau^s$$

olacak şekilde biricik bir μ olasılık ölçüsü vardır. Bu ölçüyü π ile ileri iterek K üzerinde $\nu := \pi_\# \mu$ Borel ölçüsünü kurabiliriz.

Şimdi yeterince küçük herhangi bir $\delta > 0$ için

$$W(\delta) := \left\{\tau = (\tau_1 \cdots \tau_k) : \; r_\tau < \delta \leq r_{\tau_1} \cdots r_{\tau_{k-1}}\right\}$$

olsun ve bir τ kelimesi için $W_\tau := W(r_\tau)$ olsun. Dikkat edilirse her bir $W(\delta)$ kümesi birbiriyle uyumsuz, birbiriyle ve δ ile mutlak sabitlerle karşılaştırılabilir büzüşme oranı veren kelimelerden oluşur ve $K = \bigcup_{\sigma \in W(\delta)} K_\sigma$. Şimdi bir A kümesinin r komşuluğunu $U(A, r)$ ile gösterelim. Her τ için

$$I(\tau) := \{\sigma \in W(\tau) : K_\sigma \cap U(K_\tau, r_\tau) \neq \emptyset\}$$

kümesinin eleman sayısının τ'dan bağımsız sonlu bir M üst sınırı olduğunu iddia ediyoruz. Dikkat edilirse her $\sigma \in I(\tau)$ için $F_\sigma^{-1} \circ F_\tau(K)$ kümesi, mutlak bir R için $U(K, R)$ içinde yer alır ve $F_\sigma^{-1} \circ F_\tau$ dönüşümlerinin afin ve öteleme bileşenleri, bunları belirleyen parametrelerin kompakt bir kümesi içinde kalır. Dolayısıyla eğer bir üst sınır olmasaydı birer $\sigma, \sigma' \in I(\tau)$ için $\|F_\sigma^{-1} \circ F_\tau \circ (F_{\sigma'}^{-1} \circ F_\tau)^{-1} - id\| = \|F_\sigma^{-1} \circ F_{\sigma'} - id\|$ istenildiği kadar küçük yapılabilirdi.

O halde herhangi bir $x \in K$ ve küçük bir $r > 0$ verilsin. $x \in K_\tau$ ve $r_\tau \geq r$ mümkün olduğunca küçük olacak şekilde bir τ kelimesi alalım. Elbette mutlak bir C için $r_\tau / r \leq C$. Bu durumda $K_\sigma \cap B(x, r_\tau) \neq \emptyset$ olan $\sigma \in W_\tau$ kelimeleri $I(\tau)$'dan gelir ve uygun mutlak sabitlerle

$$\frac{\nu(B(x,r))}{r^s} \leq C' \frac{\nu(B(x, r_\tau))}{r_\tau^s} \leq \frac{\sum_{\sigma \in I(\tau)} r_\sigma^s}{r_\tau^s} \leq C'' M.$$

Şimdi Teorem 15 ile $\mathcal{H}^s(K) > 0$ gelir. $\mathcal{H}^s(K) < \infty$ kısmı ise $\{K_\tau : \tau \in W(\delta)\}$ örtüleri ile kolayca gösterilebilir.

(3) $\Longrightarrow$ (1): Öncelikle varsayım altında $i \neq j$ ise $\mathcal{H}^s(K_i \cap K_j) = 0$ olduğunu gözleyelim. Ayrıca öyle bir $a > 0$ vardır ki herhangi bir $W(\delta)$ kümesinden gelen iki σ, σ' için $r_\sigma \geq a r_{\sigma'}$ olur. K'nın sonlu ve açık bir $\{U_i\}$ örtüsü

$$\sum |U_i|^s < (1 + a^s)\mathcal{H}^s(K)$$

olacak şekilde bulunabilir. Bu durumda $U = \bigcup U_i$ ve $\delta := dist(K, U^c)$ olmak üzere, uyumsuz σ ve τ'lar için $dist(K_\tau, K_\sigma) \geq \delta r_\tau$ olduğunu iddia ediyoruz. Öyle olmasaydı $F_\tau^{-1}(K_\sigma) \subseteq U$ olurdu. İlk gözlemden $\mathcal{H}^s(K \cap F_\tau^{-1}(K_\sigma)) = 0$ olacağından ve

$$\mathcal{H}^s(F_\tau^{-1}(K_\sigma)) = \left(r_\tau^{-1} r_\sigma\right)^s \mathcal{H}^s(K) \geq a^s \mathcal{H}^s(K)$$

olduğundan,

$$\mathcal{H}^s(K \cup F_\tau^{-1}(K_\sigma)) = \mathcal{H}^s(K) + \mathcal{H}^s(F_\tau^{-1}(K_\sigma)) \geq (1 + a^s)\mathcal{H}^s(K).$$

Öte yandan basit bir alıştırma ile

$$\sum |U_i|^s \geq \mathcal{H}^s(K \cup F_\tau^{-1}(K_\sigma))$$

olması gerektiği görülebilir, bu da istenen çelişkiyi verir.

Şimdi $0 < \varepsilon < 1/3$ sabitleyelim ve τ kelimesi için $G_\tau := U(K_\tau, \varepsilon r_\tau)$ ve $J(\tau) = \{\sigma \in W(|G_\tau|) : K_\sigma \cap G_\tau \neq \emptyset\}$ olsun. Bu durumda $J(\tau)$'nun eleman sayısı için mutlak bir M üst sınırı olduğunu iddia ediyoruz. Aksini varsayalım, o halde her M için $\# J(\tau) \geq M$ olan bir τ kelimesi vardır. Ω'da, içinde τ kelimesi sonsuz kere geçen dizilerin altkümesi Ω_1 ve $\Omega_2 := \Omega \backslash \Omega_1$ olsun. Ergodik teoriden bilindiği üzere $\mu(\Omega_1) = 1$ ve $\mu(\Omega_2) = 0$'dır (bunun için 6.1 numaralı kısımdaki tanımlar ile, Örnek 46 ve Sonuç 48'e bakılabilir). μ ölçüsünün tanımından hemen $\mathcal{H}^s(\pi(\Omega_2)) = 0$ elde edilir. Herhangi bir $x \in \pi(\Omega_1)$ için, x'in adresinde τ kelimesi ile biten herhangi bir σ başlangıcı alındığında, yukarıdakine benzer argümanlarla mutlak bir C sabiti için

$$\frac{\nu(B(x, r_\sigma))}{r_\sigma^s} \geq MC$$

olduğu görülebilir. Bu da Teorem 15 ile bize $\mathcal{H}^s(\pi(\Omega_1)) \leq C'/M$ ve sonuçta $\mathcal{H}^s(K) \leq C'/M$ verir. Buradan $M \to \infty$ ile $\mathcal{H}^s(K) = 0$ çelişkisi gelir. O halde sonlu bir mutlak M sınırı vardır. Bu durumda bu sınıra ulaşan (maksimal) bir τ kelimesi için, maksimallikten, herhangi bir σ kelimesi için

$$J(\sigma\tau) = \{\sigma\sigma' : \sigma' \in J(\tau)\}$$

olduğu görülebilir. Buradan,

$$V := \bigcup_{\sigma \in \Omega^*} U(K_{\sigma\tau}, \varepsilon r_{\sigma\tau}/2)$$

alındığında bu kümenin AKK'nu sağladığı gösterilebilir. □

Açıklama 23. AKK'ndaki V kümesi eğer K ile kesişiyorsa, Güçlü AKK sağlanıyor denir. Yukarıdaki kanıt aslında AKK ile Güçlü AKK'nun eşdeğerliliğini de verir. Ayrıntılar için [5] makalesine bakınız.

Örnek 24. Bir TFS AKK'nu sağlıyorsa ve hepsi de r oranında büzüştüren m tane dönüşümden oluşuyorsa, atraktörün Hausdorff boyutu $\frac{\ln m}{\ln(1/r)}$'dir.

Açıklama 25. Önceki teorem, aynı temel fikirlerin uyarlanmasıyla, konformal dönüşümlerden oluşan sistemlere de genişletilebilir. Elbette burada benzerlik boyutunun yerini onun bu duruma genelleştirilmiş hali olan ve

$$P(s) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \sup_{x\in K} \sum_{|\tau|=n} |F'_\tau(x)|^s = 0$$

denkleminin biricik çözümü olan s sayısı alacaktır ve teoremin ikinci koşulu da uygun şekilde uyarlanmalıdır. Bu konuda [3] makalesine bakılabilir.

2.1 Bir afin sistem örneği

TFS'de benzerlikler yerine afin dönüşümler alındığında irdeleme son derece karmaşık bir hal alabilmektedir. Genel sonuçlara girmeden basit bir örneğe kısaca değineceğiz:

Doğrusal bir $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dönüşümü için $F_i(x) = Tx + v_i$, $i = 1, 2$ şeklinde iki afin dönüşümlü bir sisteme bakalım. Dahası, T'nin ($\mathbb{C}$ üzerinde) diyagonelleştirilebilir olduğunu varsayalım.

Eğer M'nin özdeğerleri birer eşlenik karmaşık sayıysa bu durumda uygun bir afin dönüşümle eşlenik alarak (Hausdorff boyutunun korunacağına dikkat ediniz) birer benzerlik dönüşümünden oluşan eşdeğer bir sisteme geçebiliriz. Eğer özdeğerler gerçel ise, yine uygun bir afin eşlenikle, sistemin gerçel bir M diyagonal matrisi için $\{Mx, Mx + v\}$ şeklinde olduğu varsayılabilir.

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

olsun ve biz $1 > \lambda > \gamma > 0$ olan durumu irdeleyeceğiz. Eşlenikteki afin dönüşümün uygun seçimiyle kendimizi v vektörünün bileşenlerinin 0 ya da 1 olduğu duruma indirgeyebiliriz. Atraktöre $K_{\lambda,\gamma}$ diyelim.

Eğer v vektörü $(0, 0)$ ise atraktör tek bir noktadır. Eğer $v = (1, 0)$ ise atraktör x-ekseninin bir altkümesidir. Kolayca görüleceği üzere

$$\dim K_{\lambda,\gamma} = \begin{cases} 1 & \lambda \geq 1/2, \\ \frac{\ln 2}{\ln(1/\lambda)} & \lambda < 1/2 \end{cases}.$$

Yine $v = (0, 1)$ durumunda ise benzer durum y-ekseni üzerinde söz konusudur. Asıl önemli durum $v = (1, 1)$ olduğundadır.

Önerme 26. $0 < \gamma < \lambda \leq 1/2$ *ise* $\dim K_{\lambda,\gamma} = \frac{\ln 2}{\ln(1/\lambda)}$.

Kanıt. $K_{\lambda,\gamma}$'nın x-eksenine olan izdüşümü $\frac{\ln 2}{\ln(1/\lambda)}$ boyutlu bir Cantor kümesi olduğundan bu sayı $\dim K_{\lambda,\gamma}$ için bir alt sınırdır. Öte yandan bu atraktörün n. nesil dikdörtgenleri, birer mutlak C ve C' sabiti için $C\lambda^n \times C'\gamma^n$ boyutlarında ve toplam 2^n tanedir. Yani çapı $\asymp \lambda^n$ olan 2^n tane kümeyle atraktörü örtebiliriz. Verilen bir $\delta > 0$ için n değerini $\lambda^n < \delta$ olacak şekilde seçersek, $s = \frac{\ln 2}{\ln(1/\lambda)}$ için

$$\mathcal{H}^s_\delta(K_{\lambda,\gamma}) \leq 2^n \lambda^{ns} = 1$$

olur, bu da $\delta \to 0$ ile $\dim K_{\lambda,\gamma} \leq \frac{\ln 2}{\ln(1/\lambda)}$ verir. □

Eğer kanıtta her bir n nesil dikdörtgeni $\asymp (\lambda/\gamma)^n$ tane $\gamma^n \times \gamma^n$ boyutlarında karelerle örtmeyi deneseydik

$$\dim K_{\lambda,\gamma} \leq 1 + \frac{\ln(2\lambda)}{\ln(1/\gamma)}$$

sınırını elde ederdik. Bu, $\frac{\ln 2}{\ln(1/\lambda)}$'dan daha büyük bir üst sınırdır. Ne var ki, $\lambda > 1/2$ olduğunda "tipik" bir durumda atraktörün boyutu bu üst sınıra eşittir. Buna ileride değineceğiz.

3 Frostman Lemması

Frostman Lemması, daha önce Teorem (15)'te gördüğümüz ölçü yoğunluğu-boyut ilişkisinin diğer yönünü veriyor diyebiliriz. Kısacası, Hausdorff boyutu bilinen bir küme üzerinde belli yoğunluk sınırlarına uyan ölçülerin varlığını söyler.

En baştaki (1) tanımında $\delta = \infty$ alarak elde ettiğimiz $\mathcal{H}^s_\infty$ ölçüsüne s boyutlu Hausdorff içeriği (*Ing.* Hausdorff content) denir. Yani δ-örtüleri yerine herhangi bir sınır koymadan tüm örtüler üzerinden infimum alınacaktır. Şunu görmek kolaydır:

Lemma 27. $\mathcal{H}^s(A) = 0$ *ancak ve ancak* $\mathcal{H}^s_\infty(A) = 0$ *ise. Ayrıca* A *sınırlı bir küme ise* $\mathcal{H}^s_\infty(A) < \infty$.

Bir μ ölçüsü için $\mu(A) > 0$ ise μ'nun A'ya kısıtlanıp oranlanmasıyla elde edilen olasılık ölçüsünü $\mu_{\rfloor A}$ ile gösterelim. Yani

$$\mu_{\rfloor A}(B) := \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(A)}.$$

Ayrıca bir $m \in \mathbb{Z}$ için $\mathbb{R}^d$ üzerinde her bir kenarı $[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m})$, $k \in \mathbb{Z}$ formunda aralıklar olan küplere m. nesil ikili (*Ing.*

dyadic) küpler diyelim ve bunların topluluğunu $\mathcal{Q}_m$ ile gösterelim. Dikkat edilirse her $\mathcal{Q}_m$ uzayın bir parçalanışını verir her bir ikili küp bir sonraki neslin 2^d tane küpü ile parçalanır.

Tanım 28. $A \subseteq \mathbb{R}^d$ olsun. $\mathcal{M}(A)$ ile desteği A içinde kalan, kompakt destekli ve $0 < \mu(A) < \infty$ şartını sağlayan Radon ölçülerinin kümesini göstereceğiz. Aynı türden olasılık ölçülerinin kümesi içinse $\mathcal{P}(A)$ ile yazacağız.

Teorem 29. *$A \subseteq \mathbb{R}^d$ bir kompakt küme olsun. O halde $\mathcal{H}^s(A) > 0$ ancak ve ancak her $x \in \mathbb{R}^d$ ve $r > 0$ için $\mu(B(x, r)) \leq r^s$ şartını sağlayan bir $\mu \in \mathcal{M}(A)$ varsa.*

Kanıt. İkinci koşulun birinciyi getirdiğini Teorem (15) bize söylemişti. Diğer yöndeki kanıtın genel yöntemi şu olacak: Her m için 2^{-m} ölçeğine kadar bu özelliğe sahip bir ölçü kuracağız, bizim aradığımız ölçü de bunların limiti olacak.

GBK A kümesinin birim küpün altkümesi olduğunu varsayabiliriz. Bir $m \geq 1$ sabitleyelim. Önce m. nesil küplerde istendiği gibi davranan bir ölçü kurup daha sonra bununla oynayarak önceki nesil küplerde de istenilen davranışı veren bir ölçüye varacağız.

$\mu^{m,m}$ ölçüsünü şöyle tanımlayalım: Her $Q \in \mathcal{Q}_m$ için, bu ölçünün Q'ya kısıtlaması eğer $Q \cap A = \emptyset$ ise 0 ölçüsü olsun, değilse ölçümüz bu parçada $2^{-ms}\mathcal{L}^d_Q$ olarak tanımlansın ($\mathcal{L}^d$ bizim d boyutlu Lebesgue ölçümüz). Dikkat edilirse tanım gereği $Q \in \mathcal{Q}_m$ için $\mu^{m,m}(Q) \leq C|Q|^s$ şartı mutlak bir C sabiti ile sağlanmaktadır.

Şimdi $(m-1)$. nesilde istenen davranışı sağlayabilmek için $\mu^{m,m-1}$ ölçüsünü şöyle tanımlayalım. Bu ölçünün bir $Q \in \mathcal{Q}_{m-1}$ üzerindeki kısıtlaması

$$\begin{cases} \mu^{m,m} & \mu^{m,m}(Q) \leq 2^{-(m-1)s} \text{ ise,} \\ 2^{-(m-1)s}\mu^{m,m}_{\rfloor Q} & \mu^{m,m}(Q) > 2^{-(m-1)s} \text{ ise.} \end{cases}$$

Görüldüğü gibi $\mu^{m,m}$'in kütlesi bir önceki neslin küpleri için fazla geliyorsa fazlalığı atıyoruz, yoksa bir değişiklik yapmıyoruz. Yeni ölçünün m. nesil küplere verdiği kütle eskisine göre artmadığından bu ölçü hem m hem $(m-1)$. nesil küplerde istenen üst sınıra uyar. Bu ayarlamayı tekrar tekrar yaparak sonunda bir $\mu^m := \mu^{m,1}$ ölçüsüne varabiliriz, öyle ki her $k \leq m$ ve her $Q \in \mathcal{Q}_k$ için

$$\mu^m(Q) \leq 2^{-sk}$$

sağlanır. Üstelik, her $x \in A$ için bir $k \leq m$ ve $Q \in \mathcal{Q}_k$ küpü $\mu^m(Q) = 2^{-sk} = (|Q|/\sqrt{d})^s$ olacak şekilde bulunabilir (bu ya m. nesilde x'i içeren küptür ya da kurulumda önceki nesillere doğru giderken onun ataları içinde son oynamanın yapıldığı nesildeki küptür).

Yukarıdaki son gözlemimiz ve ikili küplerin ağaç yapısını gözetirsek, her $x \in A$ için gözlemdeki koşulu sağlayan en büyük küpü seçerek, her biri $\leq m$. nesilden, birbirinden ayrık ikili küplerden oluşan öyle bir $Q_1, \ldots, Q_l$ topluluğu vardır ki A'yı örterler ve

$$\mu^m(\mathbb{R}^n) = \sum_{i=1}^{l} \mu^m(Q_i) = \sum_{i=1}^{l} (|Q_i|/\sqrt{d})^s$$

$$= d^{-s/2} \sum_{i=1}^{l} |Q_i|^s \geq d^{-s/2}\mathcal{H}^s_\infty(A) =: c^{-1}$$

olur. Şimdi $\nu^m := \mu^m_{\rfloor \mathbb{R}^d}$ olsun (yani μ^m'yi oranlayarak olasılık ölçüsü haline getiriyoruz). Bu durumda her $k \leq m$ ve $Q \in \mathcal{Q}_k$ için $\nu^m(Q) \leq c2^{-ks}$ olur. Herhangi bir $x \in \mathbb{R}^d$ ve $r > 0$ verildiğinde, $B(x, r)$ topundan biraz daha geniş bir U açık topunu, $2^{-k-1} \leq r < 2^{-k}$ olan k tamsayısı için her biri $\mathcal{Q}_k$'da olan 2^d tane ikili küple örtebiliriz, böylece sadece d'ye bağlı bir c' sabiti ve her $m \geq k$ için

$$\nu^m(B(x, r)) \leq \nu^m(U) \leq c2^d 2^{-ks} \leq c' r^s$$

olur. Bu durumda, ν ölçüsünü $(\nu^m)_m$ dizisinin (Radon ölçülerini zayıf*-topolojisi ile alarak bulacağımız) bir $(\nu^{m_j})_j$ altdizisinin limiti olarak alırsak, ν ölçüsü desteği A kümesinde kalan (dolayısıyla kompakt destekli) bir Radon olasılık ölçüsü olur ve

$$\nu(B(x, r)) \leq \nu(U) \leq \liminf_{j\to\infty} \nu^{m_j}(U) \leq c' r^s$$

sağlanır; bu da istenen sonucu verir. □

Açıklama 30. Bu teorem A kümesi Borel kümesi (hatta Suslin kümesi) iken de doğrudur; ancak bu genel durumun kanıtı oldukça daha karmaşıktır.

Teoremin ilk sonuçlarından biri çarpım kümelerinin boyutuna ilişkindir:

Teorem 31. *$A \subseteq \mathbb{R}^d$ ve $B \subseteq \mathbb{R}^k$ boştan farklı Borel kümeleri olsunlar. $\mathcal{H}^s(A) > 0$ ve $\mathcal{H}^t(B) > 0$ ise $\mathbb{R}^{d+k}$'de $\mathcal{H}^{s+t}(A \times B) > 0$.*

Kanıt. Lemma 27 ile $\mathcal{H}^s_\infty(A), \mathcal{H}^t_\infty(B) > 0$ gelir. O halde μ ve ν sırasıyla A ve B için Frostman Lemması'nın verdiği gibi ölçüler olsunlar. O halde $\mu \times \nu \in \mathcal{M}(A \times B)$ ve herhangi bir $(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k$ ve $r > 0$ için

$$\mu \times \nu(B((x, y), r)) \leq \mu \times \nu(B(x, r) \times B(y, r)) \leq r^{s+t}$$

olduğundan $\mathcal{H}^{s+t}(A \times B) > 0$. □

Sonuç 32. *$A \subseteq \mathbb{R}^d$ ve $B \subseteq \mathbb{R}^k$ boştan farklı Borel kümeleri ise*

$$\dim(A \times B) \geq \dim A + \dim B.$$

Açıklama 33. Eğer yukarıdaki sonuçta A veya B'den en az birisinin boyutu kendi üst istif (*Ing.* upper packing) veya üst Minkowski (kutu) boyutuna eşitse, eşitlik sağlanır. Bu son koşul TFS atraktörleri gibi "düzenli yapılı" kümelerce sağlanır.

4 Enerji integralleri

Frostman Lemması'nın en önemli sonuçlarından biri de, bir kümenin Hausdorff boyutunu belli integrallerin davranışı ile karakterize etmemizi sağlamasıdır.

$\mathbb{R}^d$ üzerindeki bir μ ölçüsünün bir x noktasındaki s-potansiyeli

$$\int \frac{1}{|x-y|^s} d\mu(y)$$

ve bu ölçünün s-enerjisi

$$E_s(\mu) := \iint \frac{1}{|x-y|^s} d\mu(y) d\mu(x)$$

ile verilir (bu isimlendirmede fizikten esinlenildiği hemen anlaşılabilir).

Sezgisel olarak s değeri büyüdükçe enerjinin sonsuza ıraksamasını bekleriz. Gerçekten de bir kırılma noktası vardır ve bu, ölçünün destek kümesinin büyüklüğüyle ilişkilidir (destek kümesinin boyutu s'e göre küçükse, kuvvet kanunundaki kuvvet s olan bir potansiyele sahip parçacıkları bu küçük hacme sıkıştırmak için gerekli enerjinin çok büyük olması beklenir).

Son olarak bir $A \subseteq \mathbb{R}^d$ Borel kümesi için bu kümenin s-kapasitesini

$$C_s(A) = \sup\left\{E_s(\mu)^{-1} : \mu \in \mathcal{P}(A)\right\}$$

olarak tanımlıyoruz ($C_s(\emptyset) := 0$ olarak tanımlanır). Ana sonucumuzu söyleyebiliriz:

Teorem 34. *$A \subseteq \mathbb{R}^d$ Borel kümesi ise*

$$\begin{aligned}\dim A &= \sup\{s : \exists \mu \in \mathcal{M}(A)\ E_s(\mu) < \infty\}\\ &= \sup\{s : C_s(A) > 0\}\end{aligned}$$

ve supremumu alınan kümeler birer aralıktır.

Kanıt. Son eşitlik kapasitenin tanımından hemen gelir. Her $s < t < \dim A$ için $\mathcal{H}^t(A) = \infty$ olacağından Frostman Lemması bize her x ve $r > 0$ için $\mu(B(x,r)) \le r^t$ olan bir $\mu \in \mathcal{M}(A)$ verir. Gerekirse kısıtlama alarak μ'nün desteğinin çapının < 1 olduğunu varsayabiliriz. Şimdi herhangi bir $x \in \mathbb{R}^d$ sabitleyelim ve $B_k(x) = \left\{y : 2^{-k-1} < |x-y| \le 2^{-k}\right\}$ yazalım. Dikkat edilirse her k için $\mu(B_k(x)) \le 2^{-kt}$. O halde, μ atom içermediğinden

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{|x-y|^s} d\mu(y) &\le C \sum_{k=0}^{\infty} \int_{B_k(x)} \frac{1}{|x-y|^s} d\mu(y)\\ &\le C 2^s \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k(t-s)} =: C'\end{aligned}$$

ve böylece $E_s(\mu) < \infty$ gelir. Bu ilk eşitlikteki $\le$ yönünü kanıtlar.

Öte yandan bir $\mu \in \mathcal{M}(A)$ için $E_s(\mu) < \infty$ olsun. O halde μ-hh x için, x'teki s-potansiyeli sonlu olmalıdır. Bunun sonucu olarak öyle bir $M > 0$ sayısı ve $\mu(B) > 0$ olacak şekilde $B \subseteq A$ Borel kümesi vardır ki

$$\forall x \in B \quad \int \frac{1}{|x-y|^s} d\mu(y) \le M.$$

Elbette μ ölçüsünü B'ye kısıtlayarak elde edeceğimiz $\nu \in \mathcal{M}(B)$ ölçüsü için de her noktadaki s-potansiyeli üstten M ile sınırlıdır. Öyleyse her $x \in \mathbb{R}^d$ ve $r > 0$ için

$$\nu(B(x,r)) = \int_{B(x,r)} d\mu(y) \le \int_{B(x,r)} r^s \frac{1}{|x-y|^s} d\mu(y) \le M r^s$$

olur ve $\dim A \ge \dim B \ge s$ olur. Bu da $\ge$ yönünü verir ve kanıt biter. □

Güzel bir uygulama olarak önceleri geometrik yöntemlerle kanıtlanan bir sonucun enerji integralleri ve Fourier analizi ile kanıtına değinelim:

Teorem 35. *$\mathbb{R}^d$'nin k-boyutlu altuzaylarına $G(d,k)$ diyelim ve bir L altuzayına olan dik izdüşümü π_L ile gösterelim. $A \subseteq \mathbb{R}^d$ Borel ve $s = \dim A$ olsun.*

1. *Eğer $s \le k$ ise hemen her $L \in G(d,k)$ için $\dim(\pi_L A) = s = \dim A$.*
2. *Eğer $s > k$ ise hemen her $L \in G(d,k)$ için $\mathcal{L}^k(\pi_L A) > 0$ (ve dolayısıyla $\dim(\pi_L A) = k$).*

Burada $G(d,k)$ Grassman manifoldu standart ölçüsü ile alınmaktadır.

Kanıt. Öncelikle, izdüşümler Lipschitz olduğundan boyutu artırmaz, dolayısıyla her izdüşüm için $\min\{k,s\}$ bir üst sınırdır. İlk sav için hemen her izdüşümde s'nin bir alt sınır olduğunu göstermek gerekir.

$G(d,k)$ üzerindeki standart ölçüyü σ ile gösterelim. Yalnızca d, k ve t'ye bağlı bir c sabiti ile, her $x \in \mathbb{R}^n$ ve $r > 0$ için, $0 < t < k$ ise

$$\int |\pi_L x|^{-t} d\sigma(L) \le c|x|^{-t} \text{ ve } \sigma\{L : |\pi_L x| < r\} \le \frac{c r^k}{|x|^k} \quad (4)$$

olduğu gösterilebilir.

Şimdi $t < s \le k$ olsun. Teorem 34 bize A üzerinde $E_t(\mu) < \infty$ olan bir $\mu \in \mathcal{M}(A)$ ölçüsü verir. Bu ölçünün π_L ile ileri itilmesiyle oluşan ölçü de μ_L olsun. Elbette $\mu_L \in \mathcal{M}(\pi_L A)$ olur. Fubini ve (4) ile

$$\begin{aligned}\int E_t(\mu_L) d\sigma(L) &= \int\int\int \frac{1}{|a-b|^t} d\mu_L(a) d\mu_L(b) d\sigma(L)\\ &= \int\int\int \frac{1}{|\pi_L x - \pi_L y|^t} d\mu(x) d\mu(y) d\sigma(L)\\ &= \int\int\int \frac{1}{|\pi_L(x-y)|^t} d\sigma(L) d\mu(x) d\mu(y)\\ &\le \int\int\int \frac{c}{|x-y|^t} d\mu(x) d\mu(y) = c E_t(\mu) < \infty.\end{aligned}$$

Demek ki σ-hh L için $E_t(\mu_L) < \infty$ ve dolayısıyla $\dim \pi_L A \ge t$. Burada $t_n \nearrow s$ olacak şekilde bir dizi boyunca limit alarak hemen her L için $\dim \pi_L A \ge s$ elde ederiz. Bu ilk savı kanıtlar.

İkinci sav içinse, $\mu \in \mathcal{M}(A)$ ve $E_k(\mu) < \infty$ olsun.

$$D_{L,k}(x) := \liminf_{r \to 0} \frac{\mu_L(B(x,r))}{r^k}$$

olsun. Biz

$$\sigma\text{-hh } L \text{ için} \quad \int D_{L,k}(u)d\mu_L(u) < \infty \tag{5}$$

olduğunu göstereceğiz. Bu olduğu zaman, μ_L-hh u için $D_{L,k}(u) < \infty$ olduğundan, kanıttan sonra vereceğimiz teoreme göre $\mu_L \ll \mathcal{L}^k$ olur. Öte yandan $\mu_L(\pi_L A) = \mu(A) > 0$ olduğundan $\mathcal{L}^k(\pi_L A) > 0$ elde ederiz ve kanıt biter.

Şimdi Fatou, Fubini ve (4) yardımıyla

$$\begin{aligned}
&\int\int D_{L,k}(u)d\mu_L(u)d\sigma(L) \\
&\leq \liminf_{r\to 0} \frac{1}{r^k}\int\int \mu_L(B(u,r))d\mu_L(u)d\sigma(L) \\
&= \liminf_{r\to 0} \frac{1}{r^k}\int\int\int_{\{|u-v|\leq r\}} d\mu_L(v)d\mu_L(u)d\sigma(L) \\
&= \liminf_{r\to 0} \frac{1}{r^k}\int\int\int_{\{|\pi_L(x-y)|\leq r\}} d\mu(x)d\mu(y)d\sigma(L) \\
&= \liminf_{r\to 0} \frac{1}{r^k}\int\int \sigma\{L : |\pi_L(x-y)| \leq r\}\, d\mu(x)d\mu(y) \qquad (6) \\
&\leq \liminf_{r\to 0} \frac{1}{r^k}\int\int cr^k|x-y|^{-k}\, d\mu(x)d\mu(y) \\
&= cE_k(\mu) < \infty.
\end{aligned}$$

Böylece (5) kanıtlanmış olur ve işimiz biter. □

Açıklama 36. İkinci savın kanıtı için bilindik bir başka yöntem de ölçülerin Fourier dönüşümleri ile çalışmaktır.

Açıklama 37. Kanıtta $D_{L,k}(\cdot)$ ve $E_t(\mu.)$ gibi fonksiyonların integrallenebilir olduğunu varsaydık. A kümesi Borel iken bunun böyle olduğu kimi bilindik yöntemlerle gösterilebilir.

Açıklama 38. İkinci kısımda aslında istenenden fazlasını göstermiş olduk. Yukarıda (5)'te verilen eşitsizliği sağlayan L altuzayları için $\mu_L \ll \mathcal{L}^k$ ve $\frac{d\mu_L}{d\mathcal{L}^k} = D_{L,k}$ olur, dolayısıyla aynı eşitsizlik

$$\int D^2_{L,k}(u)\, d\mathcal{L}^k(u) < \infty$$

şekline bürünür. Yani hemen her L için μ_L'nin $\mathcal{L}^k$'ya göre mutlak sürekli olduğunu ve Radon-Nikodym türevinin de $L^2(\mathcal{L}^k)$'da olduğunu göstermiş olduk.

5 Bernoulli konvolüsyonları

$0 < \lambda < 1$ olsun. Her bir n için $+$ veya $-$ işaretini eşit olasılıkla ve birbirinden bağımsız seçerek oluşturduğumuz

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pm\lambda^n$$

serilerinin dağılımını veren ölçüye ν_λ diyelim. Bu ölçünün desteği, kolayca görüleceği üzere $\{\lambda x - 1, \lambda x + 1\}$ sisteminin atraktörü olan C_λ kümesidir. $\lambda < 1/2$ iken C_λ Hausdorff boyutu $\frac{\ln 2}{\ln(1/\lambda)}$ olan bir Cantor kümesidir. Biz $\lambda > 1/2$ durumunda ne olduğuyla ilgiliyiz. Bu durumda C_λ bir aralıktır ve doğal olarak $\nu_\lambda \ll \mathcal{L}$ olup olmadığı sorusu ortaya çıkar. Burada kanıtlamayacağımız bir teorem, ν_λ özbenzeşik bir ölçü olduğundan $\nu_\lambda \ll \mathcal{L}$ veya $\nu_\lambda \perp \mathcal{L}$ olması gerektiğini söyler. Bu soru ortaya ilk atıldığında ilk seçeneğin her $\lambda > 1/2$ için doğru olduğu tahmin ediliyordu. Erdös şunu kanıtladı:

Teorem 39. *Eğer $\frac{1}{2} < \lambda < 1$ ve $\frac{1}{\lambda}$ bir Pisot sayısı ise, $\nu_\lambda \perp \mathcal{L}$.*

Hemen ilgili tanımı verelim:

Tanım 40. Bir cebirsel $\theta > 1$ sayısının tüm Galois eşleniklerinin mutlak değeri 1'den küçükse, θ'ya bir Pisot sayısıdır denir.

Tanımdan kolayca çıkacağı üzere, θ bir Pisot sayısı ise $dist(\theta^n, \mathbb{Z})$ uzaklığı geometrik hızla sıfıra gider.

Kanıta geçmeden önce bir başka gözlemde bulunuyoruz: ν_λ ölçüsü,

$$\mu_n := \frac{1}{2}(\delta_{-\lambda^n} + \delta_{\lambda^n}), \quad n \geq 0$$

ölçülerinin sonsuz konvolüsyonuna eşittir. Bu da Fourier dönüşümünü yazmayı kolaylaştırır: Dikkat edilirse $\hat{\mu}_n(\xi) = \cos(\lambda^n\xi)$ olur, dolayısıyla

$$\hat{\nu}_\lambda(\xi) = \prod_{n=0}^{\infty} \cos(\lambda^n\xi). \tag{7}$$

Teorem 39'un kanıtı. Riemann-Lebesgue Lemması'na göre eğer $\nu_\lambda \ll \mathcal{L}$ ise $\lim_{\xi\to\infty} \nu_\lambda(\xi) = 0$ olmalıdır. Biz bunun böyle olmadığını göstereceğiz.

Öncelikle her n için $dist(\theta^n, \mathbb{Z}) \leq cr^n$ olacak şekilde $0 < r < 1$ ve c sabitleri olduğunu hatırlayalım. Kolayca görüleceği üzere, herhangi bir $k \geq 1$ için

$$\begin{aligned}
\left|\hat{\nu}_\lambda(\pi\theta^k)\right| &= \left|\hat{\nu}_\lambda(\pi)\cdot\prod_{n=1}^{k}\cos(\pi\theta^n)\right| \geq |\hat{\nu}_\lambda(\pi)|\prod_{n=1}^{\infty}|\cos(\pi\theta^n)| \\
&\geq c'\,|\hat{\nu}_\lambda(\pi)|\prod_{n=1}^{\infty}|1 - c''r^n| =: \tilde{c}\,|\hat{\nu}_\lambda(\pi)|\,.
\end{aligned}$$

Öte yandan $\theta \neq 2$ ve θ cebirsel tamsayı olduğundan her n için $\theta^n \notin \mathbb{Z}/2$ ve kolayca görüleceği üzere $\hat{\nu}_\lambda(\pi) \neq 0$. Buradan $\liminf_{k\to\infty}\left|\hat{\nu}_\lambda(\pi\theta^k)\right| > 0$ gelir ve bu da istediğimiz çelişkiyi sağlar. □

Ne var ki tipik bir $\frac{1}{2} < \lambda < 1$ parametresi için $\nu_\lambda \ll \mathcal{L}$ olduğu, Teorem 35'tekine benzer yöntemlerle gösterilebilir. Bunun için $\Omega = \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$ sembol uzayımız olsun ve Ω uzayında her basamakta 1 ve -1'e eşit olasılık veren ölçüye μ diyelim. $\pi_\lambda : \Omega \to \mathbb{R}$ de

$$\pi_\lambda(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n\lambda^n$$

izdüşümü olsun. O halde $\nu_\lambda = (\pi_\lambda)_{\#}\mu$ olur. Şimdi aynen Teorem 35'daki adımları izleyerek

$$D_\lambda(x) := \liminf_{r\to 0} \frac{\nu_\lambda(B(x,r))}{r}$$

diyelim. Eğer $\int D_\lambda(x)\,d\nu_\lambda(x) < \infty$ ise $\nu_\lambda \ll \mathcal{L}$ ve hatta $d\nu_\lambda/d\mathcal{L} \in L^2(\mathbb{R})$ olacaktır. Şimdi $J \subseteq \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ bir aralık olsun. O halde, 6'da olduğu gibi

$$\begin{aligned}
&\int_J \int D_\lambda(x) d\nu_\lambda(x) d\lambda \\
&\leq \liminf_{r\to 0} \frac{1}{r} \int \int \nu_\lambda(B(x,r)) d\nu_\lambda(x) d\lambda \\
&= \liminf_{r\to 0} \frac{1}{r} \int \int \int_{\{|x-y|\leq r\}} d\nu_\lambda(y) d\nu_\lambda(x) d\lambda \\
&= \liminf_{r\to 0} \frac{1}{r} \int \int \int_{\{|\pi_\lambda(\omega)-\pi_\lambda(\tau)|\leq r\}} d\mu(\omega) d\mu(\tau) d\lambda \qquad (8)\\
&= \liminf_{r\to 0} \frac{1}{r} \int \int \mathcal{L}\{\lambda \in J : |\pi_\lambda(\omega) - \pi_\lambda(\tau)| \leq r\}\, d\mu(\omega) d\mu(\tau).
\end{aligned}$$

Şimdi bu son integraldeki ifadenin ne kadar büyük olabileceğine bakalım. Herhangi iki ω ve τ dizinin en uzun ortak başlangıcını $\omega \wedge \tau$ ve iki dizinin farklılaştığı ilk indisi $|\omega \wedge \tau|$ ile gösterelim. Dikkat edilirse, $k = |\omega \wedge \tau|$ dersek

$$\begin{aligned}
\pi_\lambda(\omega) - \pi_\lambda(\tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} (\omega_n - \tau_n)\lambda^n = \sum_{n=k}^{\infty} (\omega_n - \tau_n)\lambda^n \\
&= \lambda^k \sum_{n=0}^{\infty} (\omega_{k+n} - \tau_{k+n})\lambda^n
\end{aligned}$$

ve üstteki son seri, sabit terimi ± 1 ve diğer katsayıları $\{-1, 0, 1\}$ kümesinden gelen serilerdir. Sabit terimi ± 1 ve diğer katsayıları mutlak değerce ≤ 1 olan kuvvet serilerinin kümesine $\mathcal{F}_1$ dersek, şunu kanıtlamak mümkündür:

Lemma 41. *$[0, 0.64)$'ü içeren öyle bir J aralığı ve $c > 0$, vardır ki, $g \in \mathcal{F}_1$ ise*

$$\forall r > 0 \quad \mathcal{L}(\{\lambda \in J : |g(\lambda)| \leq r\}) \leq cr. \qquad (9)$$

Böylece, eğer $J = [a, b] \subseteq (1/2, 0.64)$ ve herhangi $\omega, \tau \in \Omega$ ve $\lambda \in J$ için

$$\mathcal{L}\{\lambda \in J : |\pi_\lambda(\omega) - \pi_\lambda(\tau)| \leq r\} \leq c a^{-|\omega\wedge\tau|} r$$

olur. Bunu (8)'de kullanarak, böyle bir J için

$$\begin{aligned}
&\int_J \int D_\lambda(x) d\nu_\lambda(x) d\lambda \\
&\leq \liminf_{r\to 0} \frac{1}{r} \int \int \mathcal{L}\{\lambda \in J : |\pi_\lambda(\omega) - \pi_\lambda(\tau)| \leq r\}\, d\mu(\omega) d\mu(\tau) \\
&\leq c' \iint a^{-|\omega\wedge\tau|}\, d\mu(\omega) d\mu(\tau) \\
&= c' \sum_{k=0}^{\infty} a^{-k}\, \mu \times \mu\{(\omega, \tau) : |\omega \wedge \tau| = k\} \leq c' \sum_{k=0}^{\infty} (2a)^{-k} < \infty.
\end{aligned}$$

En sonda $2a > 1$ olduğunu kullandık. Bu da bize $(1/2, 0.64)$'ün her kompakt alt aralığında, dolayısıyla bu aralığın kendisinde, $\mathcal{L}$-hh λ için $\nu_\lambda \ll \mathcal{L}$ olduğunu söyler. Aslında biraz daha ayrıntılı bir analiz ile şu kanıtlanabilir:

Önerme 42. *$\mathcal{L}$-hh $\lambda \in \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \tilde{J}$ için $\nu_\lambda \ll \mathcal{L}$ ve üstelik $\hat{\nu}_\lambda \in L^2(\mathbb{R})$.*

Bunu bildikten sonra $(1/2, 1)$ aralığının tamamı için istediğimizi elde edebiliriz. Bunu görmek için, (7) ile her k için

$$\hat{\nu}_\lambda(\xi) = \hat{\nu}_{\lambda^2}(\xi)\hat{\nu}_{\lambda^2}(\lambda\xi)$$

yazılabileceğine dikkat edelim. Demek ki $\lambda^2 \in \tilde{J}$ iken yani $\lambda \in \left(2^{\frac{-1}{2}}, 2^{\frac{-1}{4}}\right)$ iken $\hat{\nu}_\lambda \in L^1(\mathbb{R})$ olur. Bunu tekrar tekrar uygulayarak ya da benzer şekilde her $k \geq 1$ için

$$\hat{\nu}_\lambda(\xi) = \hat{\nu}_{\lambda^k}(\xi)\hat{\nu}_{\lambda^k}(\lambda\xi) \cdots \hat{\nu}_{\lambda^k}(\lambda^{k-1}\xi)$$

olduğunu görerek, $\lambda \in \left(2^{\frac{-1}{2^k}}, 2^{\frac{-1}{2^{k+1}}}\right)$ için $\hat{\nu}_\lambda \in L^{\frac{2}{k}}(\mathbb{R})$ dolayısıyla $\hat{\nu}_\lambda \ll \mathcal{L}$ olduğu görülebilir.

Açıklama 43. Aslında, çok daha ayrıntılı bir analizle, aykırı λ kümesinin Hausdorff boyutunun 0 olduğu da gösterilebilir.

6 Afin örneğimize tekrar bakış

Şimdi Bölüm 2.1'deki afin sisteme geri dönüp bu kez $0 < \gamma < 1/2 < \lambda$ durumunu irdeleyeceğiz. Söz konusu TFS $\{Tx, Tx + (1,1)\}$ idi ve T matrisi diyagonali λ ve γ olan diyagonal matris idi. Daha önce atraktör $K_{\lambda,\gamma}$ için

$$\dim K_{\lambda,\gamma} \leq 1 + \frac{\ln(2\lambda)}{\ln(1/\gamma)}$$

olduğundan bahsetmiştik. Bölüm 2.1'de incelediğimiz durumda boyut bundan daha küçük bir sayıya eşitti ancak şimdi tipik bir durumda yukarıda eşitlik olduğunu göreceğiz. Kanıtta ergodik dönüşümlerle ilgili sonuçlar kullanacağımız için işe bu konuyla ilgili önbilgileri vererek başlıyoruz:

6.1 Ergodik dönüşümler

Bu kısımda ölçü uzayımız $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ ve $T : X \to X$ bir ölçülebilir dönüşüm olsun, yani her $E \in \mathfrak{B}$ için $T^{-1}E \in \mathfrak{B}$.

Tanım 44. Eğer her $E \in \mathfrak{B}$ için $\mu(T^{-1}E) = \mu(E)$ oluyorsa, T ölçüyü koruyan bir dönüşümdür denir. Eğer T ölçüyü koruyorsa, ve $T^{-1}E = E$ şartını sağlayan her $E \in \mathfrak{B}$ için $\mu(E) = 0$ veya $\mu(E) = 1$ oluyorsa, T bir ergodik dönüşümdür denir.

Yukarıdaki son cümlede "$T^{-1}E = E$" ifadesi "$\mu(T^{-1}E \bigtriangleup E) = 0$" ile değiştirilirse eşdeğer bir tanım elde edilir (burada $\bigtriangleup$ ile simetrik fark işlemi gösterilmektedir).

Örnek 45. $m \in \mathbb{Z}^+$ için $T : [0,1] \to [0,1]$, $Tx := mx \pmod 1$ dönüşümü (Lebesgue ölçüsüne göre) ergodiktir (kanıtı okuyucuya bırakıyoruz; ancak aşağıdaki örnekten de yararlanılabilir).

Örnek 46. $\Omega = \{1, 2, \ldots, m\}^{\mathbb{N}}$ yani m sembolden kurulan diziler uzayında, her indiste tüm sembollere $1/m$'er olasılık veren μ ölçüsü için, $\sigma(\omega_1\omega_2\omega_3\cdots) = (\omega_2\omega_3\omega_4\cdots)$ ile verilen σ "sola kaydırma" dönüşümü ergodiktir. Buradaki μ ölçüsü, her biri eşit olasılığa sahip m sonuca sahip bir deneyin sonsuz kere birbirinden bağımsız şekilde tekrarlanmasıyla elde edilen sonuç dağılımı olarak düşünülebilir (μ'nün tanımlı olduğu σ-cebir olarak Ω'nın Borel kümelerini alabiliriz; burada Ω'yı ayrık uzayların çarpımı olarak görüyoruz). Kaydırmanın ölçüyü koruduğunu göstermek kolaydır. Öten yandan, Ölçü Kuramı'nın bilindik teknikleri ile şu gösterilebilir: Eğer $E \in \mathfrak{B}$ ise, μ ölçü değeri bakımından istenildiği kadar küçük bir hata payı ile E kümesini aslında sonlu sayıda basamakta verilen kısıtlamalarla tanımlanmış bir küme olarak düşünebiliriz; yani yukarıdaki benzetmeye göre diyelim ilk k deneyin sonuçları üzerinden karakterize edilmiş bir olaylar kümesi olarak düşünebiliriz. Eğer $\mu(T^{-1}E \bigtriangleup E) = 0$ ise, ölçü korumadan ötürü $\mu(T^{-(k+1)}E \bigtriangleup E) = 0$ olur, yani $\mu(T^{-(k+1)}E \cap E) = \mu(E)$. Ama şimdi $T^{-(k+1)}E$ kümesi $(k+1)$. basamak ile $2k$. basamaklar (deneyler) üzerindeki kısıtlamalarla belirlendiğinden ve bunlar ilk k basamak üzerindeki koşullardan bağımsız olduğundan

$$\mu(T^{-(k+1)}E \cap E) = \mu(T^{-(k+1)}E) \cdot \mu(E) = \mu(E) \cdot \mu(E)$$

olur, burada T'nin ölçüyü koruduğunu tekrar kullandık. Sonuçta $\mu(E) = (\mu(E))^2$ gelir ki bu da $\mu(E) \in \{0,1\}$ demektir.

Ergodik dönüşümlerle ilgili şu Teoremi kanıtlamadan kullanacağız:

Teorem 47 (Birkhoff Ergodik Teoremi)**.** *Bir $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ ölçü uzayında ergodik bir T dönüşümü olsun. O zaman her $f \in L^1(\mu)$ ve μ-hh $x \in X$ için*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) = \int f \, d\mu.$$

Sonuç 48. *Herhangi bir $E \in \mathfrak{B}$ için yukarıda $f = \chi_E$ alırsak, μ-hh $x \in X$ için*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#\{k : 0 \le k \le n,\, T^k x \in E\}}{n} = \mu(E)$$

elde ederiz.

6.2 Kanıtın kalan kısmı

Önce bir tanım veriyoruz:

Tanım 49. $\mathbb{R}^d$ üzerindeki sonlu bir μ Borel ölçüsünün Hausdorff boyutu

$$\dim \mu := \inf \{\dim A : \ \mu(A) > 0\}$$

olarak tanımlanır. Ölçü yoğunluk teoremlerinden (Teorem 15) görülebileceği üzere eşdeğer olarak

$$\dim \mu = \operatorname{ess\,inf}_\mu \ \liminf_{r\to 0} \frac{\ln \mu(B(x,r))}{\ln r}$$

yazabiliriz.

Elbette $\mathbb{R}^d$ uzayındaki herhangi bir ölçünün Hausdorff boyutu en fazla d olabilir. Tek boyutta Lebesgue ölçüsü için $\dim \mathcal{L} = 1$ olduğu açıktır. Tanımdan hemen görüleceği üzere, $\mu \ll \mathcal{L}$ ise yine $\dim \mu = 1$ olmak zorundadır.

Açıklama 50. Benzer şekilde $\dim^* \mu = \inf\{\dim A : \ \mu(A^c) = 0\}$ şeklinde bir "üst Hausdorff boyutu" da tanımlanabilir ama bu, yukarıdaki tanım kadar kullanışlı değildir.

Amacımız şunu kanıtlamak:

Önerme 51. *Eğer $0 < \gamma < \frac{1}{2} \le \lambda < 1$ ve $\dim \nu_\lambda = 1$ ise afin atraktörün Hausdorff boyutu*

$$\dim K_{\lambda,\gamma} = s := 1 + \frac{\ln(2\lambda)}{\ln(1/\gamma)}$$

olur.

Bir önceki bölümde, Lebesgue ölçüsüne göre hemen her $\lambda \in (1/2, 1)$ için $\nu_\lambda \ll \mathcal{L}$ olduğu açıklanmıştı. Tüm bu λ değerleri için $\dim \nu_\lambda = 1$ koşulunun sağlandığına dikkat ediniz.

Kanıt için ilk olarak $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ dizi uzayını kuralım ve atraktörümüzün noktalarını

$$\pi(\omega) := (\pi_\lambda(\omega), \pi_\gamma(\omega)) := \left(\sum_{n=0}^{\infty} \omega_n \lambda^n, \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n \gamma^n \right)$$

şeklinde bir $\pi : \Omega \to K_{\lambda,\gamma}$ izdüşümü ile kodlayalım. Yine sembol uzayımızda her basamakta olasılıkları eşit dağıtan ölçüye μ diyelim ve $\nu = \pi_\# \mu$ ileri itmesi olsun. Aynı zamanda ν'nün ilk koordinata izdüşüm altında ileri itmesi olan $(\pi_\lambda)_\# \mu$ ileri itmesinin verdiği ölçü de, daha önce ν_λ olarak yazdığımız ölçüye bir afin dönüşüm ile eşdeğerdir. Dolayısıyla gösterim yalınlığı açısından biz bu ileri itmeyi yine ν_λ olarak göstereceğiz ve burada elde edeceğimiz sonuçlar daha önceki ν_λ ölçümüz için de geçerli olacaktır.

Hedefimiz, $\dim \nu_\lambda = 1$ ise ν-hh $z \in \mathbb{R}^2$ için

$$\liminf_{r \searrow 0} \frac{\ln \nu(B(z,r))}{\ln r} \ge s,$$

ya da eşdeğer şekilde

$$\mu\text{-hh } \omega \in \Omega \text{ için} \qquad \liminf_{r \searrow 0} \frac{\ln \nu(B(\pi(\omega),r))}{\ln r} \ge s \tag{10}$$

olduğunu göstermek; çünkü bunu yaptığımızda Sonuç 16 ile işimiz biter.

Varsayımımız gereği $\gamma < 1/2$ olduğu için atraktörümüzün ikinci koordinata izdüşümü, GAK'nu sağlayan ve γ oranlı iki dönüşümlü bir benzerlik sisteminin atraktörüdür ve biraz yukarıda tanımladığımız gösterimi kullanarak, bir $c = c(\gamma)$ herhangi iki $\omega, \tau \in \Omega$ için

$$|\pi(\omega) - \pi(\tau)| \ge |\pi_\gamma(\omega) - \pi_\gamma(\tau)| \ge c\gamma^{|\omega \wedge \tau|}$$

olduğunu görebiliriz.

Şimdi herhangi $\omega \in \Omega$ ve $r > 0$ verilsin. $c\gamma^k > r$ olacak şekilde en büyük bir $k = k(r)$ tamsayısı seçelim (dolayısıyla

$\gamma^k \sim r$). Bu durumda

$$\begin{aligned}\nu(B(\pi(\omega),r)) &= \mu\left\{\tau : |\pi(\omega)-\pi(\tau)| \le r\right\}\\ &\le \mu\left\{\tau : |\omega\wedge\tau| \ge k, |\pi_\lambda(\omega)-\pi_\lambda(\tau)| \le r\right\}\\ &= 2^{-k}\mu\left\{\tau : |\pi_\lambda(\sigma^k\omega)-\pi_\lambda(\tau)| \le r\lambda^{-k}\right\}\\ &= 2^{-k}\nu_\lambda(B(\pi_\lambda(\sigma^k\omega), r\lambda^{-k})) \qquad (11)\end{aligned}$$

olur. Burada $\sigma : \Omega \to \Omega$ ile önceki kısımdaki sola kaydırma (dizinin ilk elemanını düşürme) dönüşümünü gösterdik. Öte yandan $\dim \nu_\lambda = 1$ koşulu, yine Sonuç 16 ile bize

$$\nu_\lambda\text{-hh } x \in \mathbb{R} \text{ için} \qquad \liminf_{r\searrow 0} \frac{\ln \nu_\lambda(B(x,r))}{\ln r} = 1 \qquad (12)$$

ya da eşdeğer şekilde

$$\mu\text{-hh } \omega \text{ için} \qquad \liminf_{r\searrow 0} \frac{\ln \mu(B(\pi_\lambda(\omega),r))}{\ln r} = 1 \qquad (13)$$

verir. Şimdi (11) göz önüne alındığında, hangi $\sigma^k\omega$ noktaları için (12)'deki "tipik" davranışı göreceğimiz sorusu aklımıza gelir. Sezgisel yanıt şudur: Tipik bir ω noktası ergodik σ dönüşümü ile ötelendiğinde yörüngesi yine tipik noktalar kümesinde kalacaktır, istenen tipik davranış çoğu ω ve k değerleri için görülecektir. Ayrıntıları şu şekilde tamamlayabiliriz:

Öncelikle Egoroff Teoremi, (13) limitindeki yakınsaklığın (ölçüsü 1'e istenildiği kadar yakın seçilebilecek) bir Ω_1 kümesi üzerinde düzgün yakınsaklık olduğunu söyler. Birkhoff Teoremi'nin sonucu da, $\mu(\Omega_0) = 1$ olan bir Ω_0 kümesinden seçilen her ω noktası için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#\{k : 0 \le k \le n,\, \sigma^k\omega \in \Omega_1\}}{n} = \mu(\Omega_1) > 0$$

olduğunu verir. Şimdi bir $\omega \in \Omega_0$ sabitleyelim ve $k_j = k_j(\omega)$ ile, $\sigma^k\omega \in \Omega_1$ şartını sağlayan k indislerinin oluşturduğu altdiziyi gösterelim. Bu en son eşitsizlik (altdizinin terimlerinin "pozitif yoğunluk" ile dağılmış olması) bize

$$\lim_{j\to\infty} \frac{k_{j+1}}{k_j} = 1 \qquad (14)$$

olduğunu söyler. Şimdi herhangi bir $\varepsilon > 0$ verilsin. Düzgün yakınsaklık nedeniyle bir $r_0 = r_0(\varepsilon) > 0$ sayısını, her $r < r_0$ ve $j \ge 1$ için

$$\frac{\ln \nu_\lambda(B(\pi_\lambda(\sigma^{k_j}\omega), r))}{\ln r} \ge 1 - \varepsilon \qquad (15)$$

olacak şekilde bulabiliriz. Dolayısıyla yeterince küçük bir r için $j = j(r)$ indisi

$$c\gamma^{k_{j+1}} < r \le c\gamma^{k_j} \qquad (16)$$

olacak şekilde seçilirse (11) ile

$$\nu(B(\pi(\omega),r)) \le 2^{-k_j}\nu_\lambda(B(\pi_\lambda(\sigma^{k_j}\omega), r\lambda^{-k_j})) \qquad (17)$$

olur. Dikkat edilirse $j = j(r)$'nin seçimi nedeniyle $r\lambda^{k_j} \asymp (\gamma/\lambda)^{k_j}$ ve dolayısıyla $r \to 0$ iken $j \to \infty$ olduğundan $r\lambda^{-k_j} \to 0$ gelir. Böylece $r \to 0$ iken (14),(15),(16) ve (17) kullanılarak

$$\liminf_{r\searrow 0} \frac{\ln \nu(B(\pi(\omega),r))}{\ln r} \ge \frac{-\ln 2}{\ln\gamma} + (1-\varepsilon)\left[1 - \frac{\ln\lambda}{\ln\gamma}\right]$$

elde edilir. Bu sonuç her $\omega \in \Omega_0$ için doğru olduğu için, $\varepsilon \to 0$ ile hedefimiz olan (10) eşitsizliği kanıtlanır ve işimiz biter.

Kaynaklar

[1] Christoph Bandt and Siegfried Graf. Self-similar sets. VII. A characterization of self-similar fractals with positive Hausdorff measure. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 114(4):995–1001, 1992.

[2] Pertti Mattila. *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces*, volume 44 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. Fractals and rectifiability.

[3] Yuval Peres, MichałRams, Károly Simon, and Boris Solomyak. Equivalence of positive Hausdorff measure and the open set condition for self-conformal sets. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 129(9):2689–2699, 2001.

[4] Yuval Peres, Wilhelm Schlag, and Boris Solomyak. Sixty years of Bernoulli convolutions. In *Fractal geometry and stochastics, II (Greifswald/Koserow, 1998)*, volume 46 of *Progr. Probab.*, pages 39–65. Birkhäuser, Basel, 2000.

[5] Andreas Schief. Separation properties for self-similar sets. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 122(1):111–115, 1994.

[6] Boris Solomyak. Notes on Bernoulli convolutions. In *Fractal geometry and applications: a jubilee of Benoît Mandelbrot. Part 1*, volume 72 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 207–230. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.