Alan Dolduran Bir Eğri

Derya ÇELİK*, Şahin KOÇAK †, Fatma Diğdem KOPARAL*, Yunus ÖZDEMİR*

İçimizden birisi, bir akşamüstü, biraz hüzünlü bir çehre ile, diğer üçümüzün yanına geldi ve "Bu Barnsley ([2]) ne yapıyor böyle? Kareyi dolduran eğri konusunu anlamak istemiştim. Fakat öyle karışık işler yapıyor ki! Önce uzaya çıkıp, sonra oradan düzleme izdüşürüyor; bunu daha doğrudan ve anlaşılır bir şekilde yapamaz mıydık?" dedi.

İçimizden bir diğeri, "Kitaptan Deliller'e ([1]) bir baksak" dedi. "Böyle ölmez bir problemin orada mutlaka harika bir çözümü vardır."

Hemen Kitaptan Deliller'e uzandık. Ama sonuç bir hayal kırıklığı idi. Bir zamanlar büyük zihinleri bile allak-bullak etmiş bu inanılmaz fenomen bu göksel kitapta yoktu! Buna anlam vermekte zorlandık.

İçimizden başka birisi, "Bu işi en iyisi kendimiz çözelim." dedi. "Zaten insan kendi yapmadığını tam olarak anlayamaz."

Böylece işe giriştik. Düzlemde bir kareyi dolduran ilk eğriyi 1890'da Peano keşfetmiş, Hilbert de 1891'de bu şaşırtıcı olayın daha iyi anlaşılması için tek sayfalık bir makalesinde geometrik bir inşa vermişti. Daha sonra sayısız başka örnekler verildi ([3]) ve bunların bazılarında örtük veya açık şekilde fraktal bazı tasarımlar bulunuyordu. Biz de az-çok fraktalci sayılırdık ve zaten kendini ikram eden bir ana fikri kendimizce hayata geçirmeliydik.

Önce ana fikri ifade etmemiz yerinde olacak; ama bunun için de fraktal geometrinin harika bir teoremine başvurmamız gerekiyor. Buna Yinelemeli Fonksiyon Sistemleri teoremi deniyor. Bu teoremi genel durumda ifade etmek yerine, hem daha kolay anlaşılması için, hem de bu kadarı zaten işimizi göreceğinden, Öklidyen düzlem üzerinde anlatmak istiyoruz. Arzu edenler, söylenenleri neredeyse kelimesi kelimesine herhangi bir tam metrik uzaya aktarabilirler.

Yinelemeli fonksiyon sistemleri (YFS)

Standart metriğiyle $\mathbb{R}^2$ Öklid düzlemini gözönüne alalım. Bunun üzerinde tanımlanmış, büzülme şeklindeki benzerlik dönüşümlerini ele alacağız. Böyle bir $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ fonksiyonu, her $x, y \in \mathbb{R}^2$ ve uygun bir $0 < \lambda < 1$ için, $\|f(x) - f(y)\| = \lambda\|x - y\|$ koşulunu sağlar.

Elimizde böyle tek bir fonksiyon olsaydı, herkes biliyor ki bunun tek bir sabit noktası olacaktı ve hangi noktadan yola çıkarsak çıkalım, fonksiyonu tekrar tekrar uygulayarak ("yi-

*Eskişehir Teknik Üniversitesi, Matematik Bölümü, 26470, Eskişehir, Türkiye. deryacelik@eskisehir.edu.tr, fdyildirim@eskisehir.edu.tr, yunuso@eskisehir.edu.tr.

†Anadolu Üniversitesi, Matematik Bölümü, 26470, Eskişehir, Türkiye. skocak@anadolu.edu.tr.

neleyerek" ya da "itere ederek") o sabit noktaya ulaşacaktık. Yani $f(x_0) = x_0$ şeklinde (tek bir) $x_0 \in \mathbb{R}^2$ noktası olacaktı ve her $x \in \mathbb{R}^2$ için

$$x, f(x), f(f(x)) =: f^2(x), f(f(f(x))) =: f^3(x), \ldots, f^n(x), \ldots$$

dizisi x_0 noktasına yakınsayacaktı. Bu durum, Banach sabit nokta teoremi denilen mücevherin bir özel halidir.

Elimizde böyle f_1, f_2 gibi iki fonksiyon varsa, artık ortak bir sabit nokta bekleyemeyiz. Her ikisinin kendi başlarına sabit noktaları olacaktır, ama bunlar farklı ise, birinin sabit bıraktığını diğeri başka bir yere gönderecektir.

İki fonksiyon bir noktayı ne yapar?

Bir fonksiyon bir noktayı bir noktaya gönderir.

Bir fonksiyon iki noktayı ne yapar?

İki noktaya götürür diyebiliriz. Ya da, bire-bir değilse, iki noktayı bir noktaya da götürebilir.

Bir fonksiyon, dolaylı olarak da olsa, neticede bir alt-kümeyi, o kümenin elemanlarının resimlerinin oluşturduğu alt-kümeye götürür diyebiliriz. Yani bu durumda o fonksiyon, tanım kümesinin alt-kümelerinin kümesinden (kuvvet kümesinden), değer kümesinin kuvvet kümesine giden yeni bir fonksiyon tanımlamış olur.

Peki, iki fonksiyon bir noktayı ne yapar?

Her birinin bu noktayı götürdüğü noktaların kümesine götürür diyebilir miyiz? Tabii ki istersek diyebiliriz. Ama bu durumda, örneğin $f_1, f_2 : X \to Y$ gibi iki fonksiyon söz konusu ise, X kümesinden Y'nin kuvvet kümesine giden bir fonksiyon tanımlamış oluruz:

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow \mathcal{P}(Y) \\ x &\longmapsto \{f_1(x), f_2(x)\} = \{f_1(x)\} \cup \{f_2(x)\}. \end{aligned}$$

Herhangi bir $A \subset X$ alt-kümesi için de, bu alt-kümenin f_1 ve f_2 altındaki resimlerinin birleşimlerini alarak, bir

$$\begin{aligned} F : \mathcal{P}(X) &\longrightarrow \mathcal{P}(Y) \\ A &\longmapsto f_1(A) \cup f_2(A) \end{aligned}$$

fonksiyonunu tanımlayabiliriz.

Düzlemdeki benzerlik dönüşümlerimize dönecek olursak, demek ki $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gibi iki (büzücü) benzerlik dönüşümü verildiğinde,

$$\begin{aligned} F : \mathcal{P}(\mathbb{R}^2) &\longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^2) \\ A &\longmapsto f_1(A) \cup f_2(A) \end{aligned}$$

şeklinde bir fonksiyona ulaşmış olduk. Bunun bize ne faydası olabilir?

Tek bir f için $x, f(x), f^2(x), f^3(x), \ldots, f^n(x), \ldots$ dizisi bize f'nin sabit noktasını vermişti. Acaba aynı şeyi F fonksiyonuna uygulasak ve bir $\{x\} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ elemanından yola çıksak,

$$\{x\}, F(\{x\}) = \{f_1(x), f_2(x)\}, F^2(x) = \{f_1f_1(x), f_1f_2(x), f_2f_1(x), f_2f_2(x)\}, \ldots, F^n(\{x\}), \ldots$$

dizisi nasıl bir şey olur?

Bir örnek üzerinde şansımızı yoklayabiliriz.

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f_1(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2,\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_2\right)$$

$$f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f_2(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(x_1 - 1) + \frac{1}{2}x_2,\ -\frac{1}{2}(x_1 - 1) + \frac{\sqrt{3}}{2}x_2\right) + \big(1, 0\big)$$

fonksiyonlarını gözönüne alalım. Burada f_1 fonksiyonu $\lambda_1 = 1/\sqrt{3}$ büzülme katsayılı ve $(0, 0)$ noktası etrafında pozitif yönde $\theta = \frac{\pi}{6}$ kadar dönme, f_2 fonksiyonu da $\lambda_2 = 1/\sqrt{3}$ büzülme katsayılı ve $(1, 0)$ noktası etrafında negatif yönde $\theta = \frac{\pi}{6}$ kadar dönmedir. Yinelemenin başlangıç noktası olarak da $\{(1/2, 0)\} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ noktasını alalım. Şekil 1'de F fonksiyonunun ilk 6 yinelemesi ile 10. yinelemesini görüyorsunuz. Epey ilginç bir şekle benziyor.

Demek ki bu işte bir iş var! Ama $\mathbb{R}^2$'nin bu alt-kümelerinin bir yere yakınsaması ne demek? Buna resmiyet kazandırmak için yapabileceğimiz en iyi şey bu alt-kümeler arasında bir uzaklık tanımlayarak $\mathbb{R}^2$'nin kuvvet kümesini bir metrik uzaya dönüştürmek olabilir. Şansımıza, böyle bir şeyi 100 sene kadar önce Hausdorff yapmıştı. Ancak bütün alt-kümeler arasında bir uzaklık tanımlamaya çalışmak pek anlamlı olmuyor. Ne var ki, kendimizi kompakt alt-kümelerle sınırlarsak, pek çok amaca uygun düşen ve manifoldlar arası uzaklık tanımlamaktan, bilgisayarlarda resim işlemeye kadar yaygın bir uygulama alanı bulmuş olan önemli bir metriğe ulaşıyoruz. Bunu kısaca gene $\mathbb{R}^2$ üzerinde açıklamaya çalışalım.

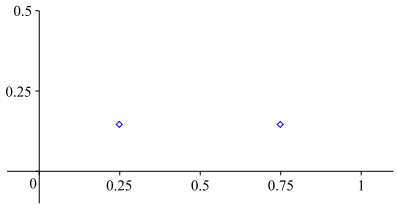
Hausdorff metriği

Bir $A \subset \mathbb{R}^2$ kompakt kümesi verildiğinde, bunun r-komşuluğu olarak, A'nın her noktası etrafındaki r-yarıçaplı (açık) yuvarların birleşimini alıyoruz. Bunu A_r ile gösterelim. Şimdi $\mathbb{R}^2$'de A ve B gibi iki kompakt küme verildiğinde, şüphesiz $B \subset A_r$ ve $A \subset B_r$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı vardır. İşte böyle bütün r'lerin infimumuna, A ile B arasındaki Hausdorff uzaklığı diyoruz. $\mathbb{R}^2$'nin boş olmayan bütün kompakt alt-kümelerinin kümesini $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ ile gösterirsek, Hausdorff uzaklığı bu küme üzerinde bir metrik tanımlıyor. Bunu göstermeniz güzel ve öğretici bir alıştırma olacaktır. Aslında biraz daha fazlası doğru: $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ bu metrik altında tamdır! Bunu göstermek biraz daha zor olsa da, gene de bir deneyebilirsiniz (veya örneğin, [2]'ye bakabilirsiniz.)

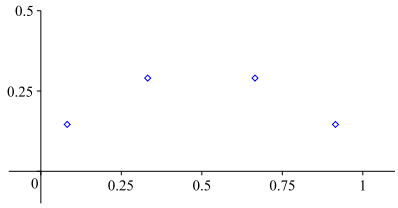
YFS teoremi

Şimdi artık $\mathbb{R}^2$ için yinelemeli fonksiyon sistemleri teoremini ifade edebiliriz.

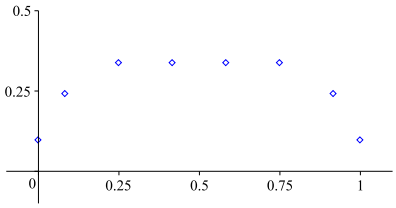
f_1, f_2 fonksiyonları $\mathbb{R}^2$ üzerinde büzücü benzerlikler olsunlar. Hatta fonksiyon sayısını artırabiliriz; $f_1, f_2, \ldots, f_N$ fonksiyonları $\mathbb{R}^2$ üzerinde büzücü benzerlikler olsunlar. Bunlar



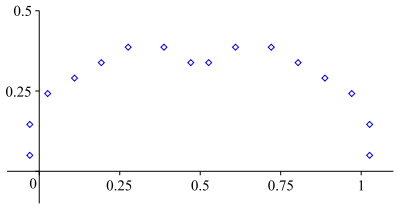
(a) Adım 1



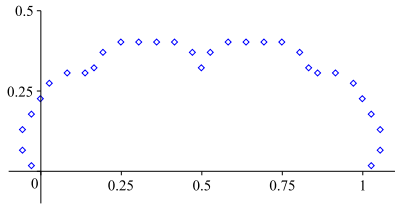
(b) Adım 2



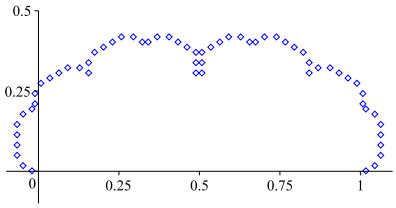
(c) Adım 3



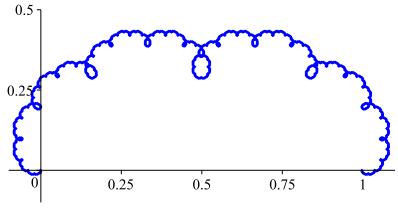
(d) Adım 4



(e) Adım 5



(f) Adım 6



(g) Adım 10

Şekil 1: F fonksiyonunun ilk 6 yinelemesi (a-f) ve 10. yinelemesi (g)

yardımıyla, daha önce izah ettiğimiz gibi,

$$\begin{aligned} F : \mathcal{H}(\mathbb{R}^2) &\longrightarrow \mathcal{H}(\mathbb{R}^2) \\ A &\longmapsto f_1(A) \cup f_2(A) \cup \ldots \cup f_N(A) \end{aligned}$$

fonksiyonunu oluşturalım. (f_i fonksiyonları sürekli olduğu için, A'yı gönderdiğimiz küme de kompakttır.) Böylece tam bir metrik uzay üzerinde bir fonksiyon tanımlamış olduk. Tabii insanın aklına ister-istemez Banach sabit nokta teoremi geliyor. Bu fonksiyon bir büzülme olsaydı $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$'de bir sabit noktamız, yani $\mathbb{R}^2$'de kompakt bir A_0 kümemiz olacaktı, öyle ki

$$F(A_0) = f_1(A_0) \cup f_2(A_0) \cup \ldots \cup f_N(A_0) = A_0$$

eşitliği geçerli olacaktı ve hangi $A \subset \mathbb{R}^2$ kompakt kümesinden yola çıkarsak çıkalım,

$$A, F(A), F^2(A), \ldots, F^n(A), \ldots$$

dizisi $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$'deki Hausdorff metriğine göre, A_0 sabit noktasına (tabii bu artık $\mathbb{R}^2$'de kompakt bir küme) yakınsayacaktı.

Gerçekten de, F fonksiyonu $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ üzerinde artık bir benzerlik dönüşümü olmasa bile, isterseniz gösterebileceğiniz gibi, bir büzülmedir! Dolayısıyla, Banach sabit nokta teoremi için sahne hazırdır ve herhangi bir $A \subset \mathbb{R}^2$ (yani $A \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$) kompakt kümesini alıp, F altında yineleyerek, $A_0 \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ sabit noktasına (yani $A_0 \subset \mathbb{R}^2$ kompakt kümesine) ulaşabiliriz. A_0 kümesine yinelemeli fonksiyon sisteminin çekicisi (veya "atraktörü") de denmektedir. Fraktaller ve boyut konusuna girmeyeceğiz ama, muhtemelen görmüş olduğunuz bir çok "fraktal" bu yöntemle oluşturulmaktadır. (f_i fonksiyonlarını benzerlik dönüşümleri olarak aldığımız için, $A_0 = f_1(A_0) \cup f_2(A_0) \cup \ldots \cup f_N(A_0)$ eşitliği, A_0 kümesinin, kendisinin bazı benzer kopyalarının birleşimi olarak ifade edilebilmesi anlamına gelmektedir ve bu duruma da "kendine benzerlik" denmektedir.)

Daha önce de ifade ettiğimiz gibi, yinelemeli fonksiyon sistemleri teoremi denilen bu olgu, $\mathbb{R}^2$ yerine herhangi bir tam metrik uzay ve f_i fonksiyonları yerine herhangi büzülmeler aldığımızda da geçerlidir.

Şimdi Şekil 1'e YFS teoremi çerçevesinde tekrar bakarsak, orada belirmekte olan beklenmedik şeklin, $\mathbb{R}^2$ üzerindeki $\{f_1, f_2\}$ yinelemeli fonksiyon sisteminin kendini adım adım hissettiren çekicisinin, (şüphesiz yetersiz) bir resmi olduğunu görürüz.

İlk denememiz

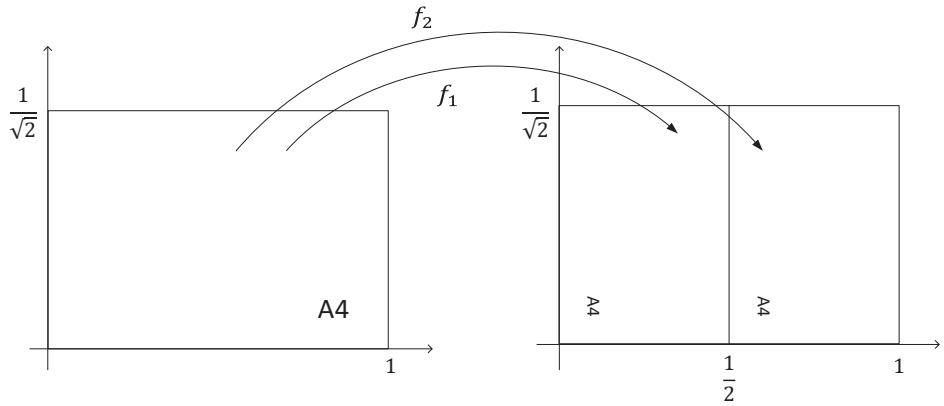
YFS teoremi ile donanmış olarak arayışımıza başladık. Önce şunu belirtelim ki, eğer $\mathbb{R}^2$'deki bir YFS için $f_1, f_2, \ldots, f_N$ büzücü benzerlikleri belli bir bölgeyi kendine gönderiyorlarsa, bütün yineleme oyunu bu bölge içinde oynanacaktır ve bu bölgeden bir nokta ile başlayıp, onu F altında yinelersek, sistemin çekicisi de bu küme içinde belirecektir. (Hatta bu bölge $\mathbb{R}^2$'de kapalı, dolayısıyla tamsa, verilen fonksiyon sistemini, $\mathbb{R}^2$ üzerinde değil de, o bölge üzerinde bir YFS olarak kabul edebiliriz ve $\mathbb{R}^2$'yi unutabiliriz.)

Bizim niyetimiz, $\mathbb{R}^2$ üzerinde (ya da bir kare veya dikdörtgen üzerinde) uygun bir YFS tanımlayıp, yinelemenin başlangıç kümesi olarak da, bir nokta yerine, basit bir eğri almak ve bunun yinelemeleriyle limit durumunda uygun bir bölgeyi doldurmaktı. Başlangıçta sözünü ettiğimiz ana fikir buydu. Duruma kolay hakim olmak için de, mümkün olduğu kadar az sayıda fonksiyonla çalışmak istiyorduk. Tek bir fonksiyon limitte sadece tek bir nokta vereceği için en az iki fonksiyonla çalışmalıydık. Onun için, elimizin altında hazır A4 kâğıdı da olduğundan, önce şöyle bir sistem düşündük:

A4 kâğıdı$= [0,1] \times \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ deyip,

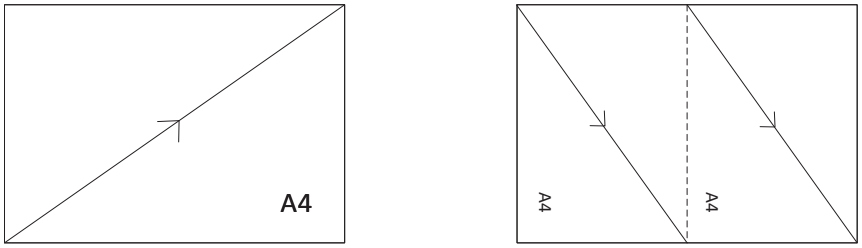
$$f_1(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_2, -x_1) + \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ ve } f_2(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_2, -x_1) + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

fonksiyonlarını tanımladık. (Bu fonksiyonları ister $\mathbb{R}^2$, ister A4 üzerinde tanımlanmış olarak düşünebilirsiniz.) Bu fonksiyonlar $\frac{1}{\sqrt{2}}$ büzme katsayılı benzerlik dönüşümleridir. (Şekil 2'ye bkz.)



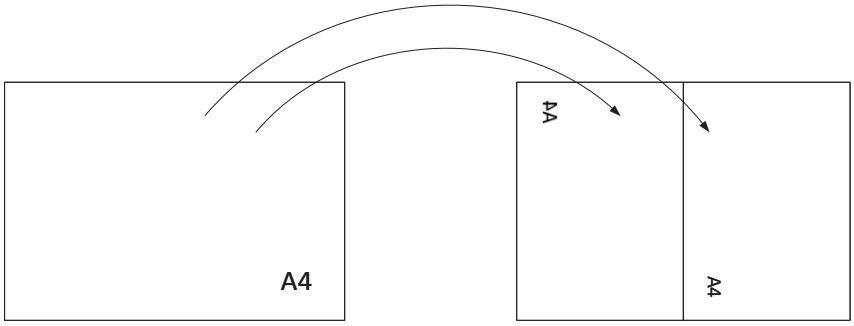
Şekil 2: f_1 ve f_2 benzerlik dönüşümleri

Bu sistem altında $A4 = f_1(A4) \cup f_2(A4)$ olduğundan, yineleme için hangi başlangıç kümesini seçersek seçelim, yineleme dizisinin limiti (sistemin çekicisi) bu küme olacaktı. Önce köşegenle başlayıp, onu yineleyelim dedik (Şekil 3):



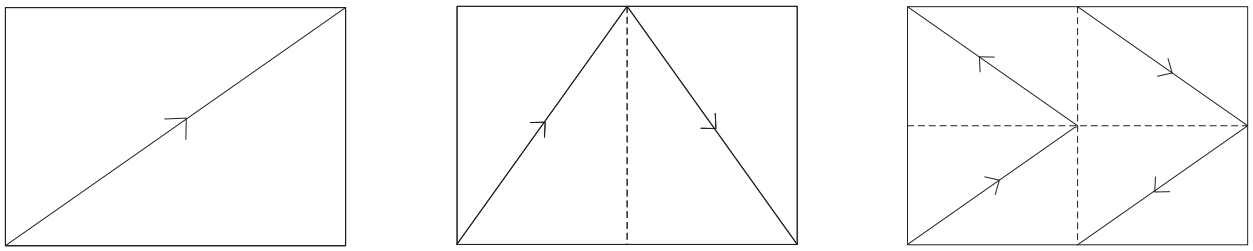
Şekil 3

Bu tabii işimize yaramazdı, çünkü eğri daha ilk adımda koptu. Bunu düzeltmek için sistemi hafif değiştirdik (Şekil 4):



Şekil 4

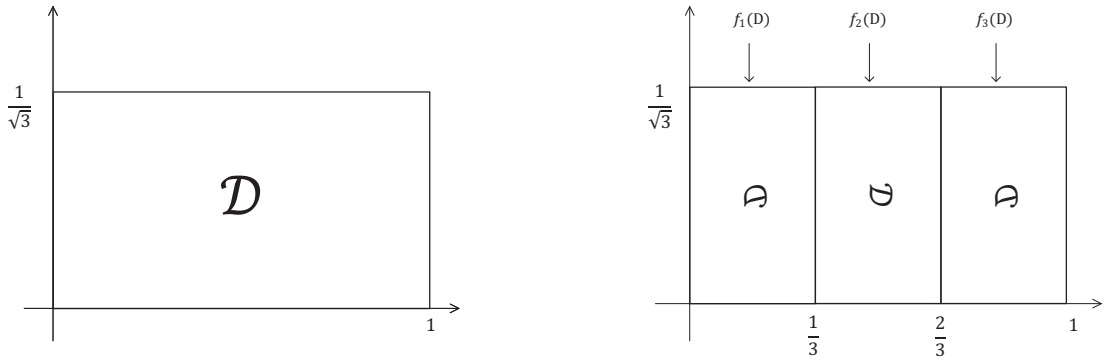
Ama bu defa da eğrimiz ikinci yinelemede koptu (Şekil 5):



Şekil 5

Ve umut veren bir ansatz

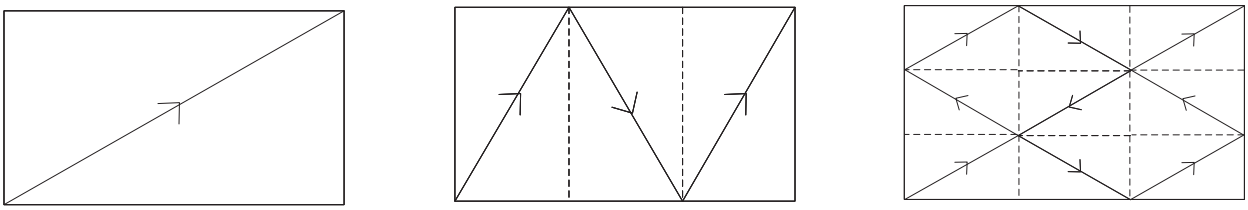
Bunun üzerine, köşegenin başlangıç ve bitiş noktalarını yineleme sırasında sabit tutmanın iyi olacağını görüp, bunu sağlamak için de fonksiyon sayısını artırmanın işimizi kolaylaştırabileceğini hissedip, 3 fonksiyonlu bir sisteme geçmeye karar verdik ve o akşamın geç saatlerinde şu sistemi oluşturduk (Şekil 6):



Şekil 6

$$
\begin{aligned}
f_1(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{3}}(y,x) \\
f_2(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{3}}(y,-x) + \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\
f_3(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{3}}(y,x) + \left(\frac{2}{3}, 0\right)
\end{aligned}
$$

f_1, f_2, f_3 fonksiyonları $\mathbb{R}^2$'de (ya da isterseniz $D = [0,1] \times [0, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ dikdörtgeni üzerinde) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ büzülme katsayılı benzerlik dönüşümleri; bunlar D dikdörtgenini kendisine gönderiyor ve $D = f_1(D) \cup f_2(D) \cup f_3(D)$ olduğundan D dikdörtgeni bu YFS'nin çekicisi. Şimdi bu dikdörtgenin $\left[(0,0), \left(1, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]$ köşegenini alıp, biraz da bilgisayar yardımıyla, yinelediğimiz zaman, aşağıdaki şekli elde ettik (Şekil 7). Galiba D'yi dolduran bir eğri bulduk deyip, bunun ifade ve ispatını ertesi güne bırakıp dağıldık.



Şekil 7

Alan dolduran bir eğri

D dikdörtgeninin köşegenini $\{f_1, f_2, f_3\}$ sistemi ile yineleyerek elde ettiğimiz eğriler dizisini şöyle parametrize edebiliriz:

$\gamma_0 : [0,1] \to D$, $\gamma_0(t) = \left(t, \frac{t}{\sqrt{3}}\right)$ eğrisi, köşegenin parametrizasyonu olsun. İlk yinelemede ortaya çıkan eğriyi şöyle parametrize edebiliriz:

$$\gamma_1 : [0,1] \to D,\ \ \gamma_1(t) = \begin{cases} f_1(\gamma_0(3t)) & ; \ 0 \le t \le \frac{1}{3} \\ f_2(\gamma_0(3t-1)) & ; \ \frac{1}{3} \le t \le \frac{2}{3} \\ f_3(\gamma_0(3t-2)) & ; \ \frac{2}{3} \le t \le 1 \ . \end{cases} \tag{1}$$

Devamında da, k. yineleme için,

$$\gamma_k : [0,1] \to D,\ \ \gamma_k(t) = \begin{cases} f_1(\gamma_{k-1}(3t)) & ; \ 0 \le t \le \frac{1}{3} \\ f_2(\gamma_{k-1}(3t-1)) & ; \ \frac{1}{3} \le t \le \frac{2}{3} \\ f_3(\gamma_{k-1}(3t-2)) & ; \ \frac{2}{3} \le t \le 1 \end{cases}$$

yazabiliriz. Bu eğrilerin, (aldığımız, uçları birbirine doğru biçimde ekleme tedbiri nedeniyle!) sürekli oldukları açıktır.

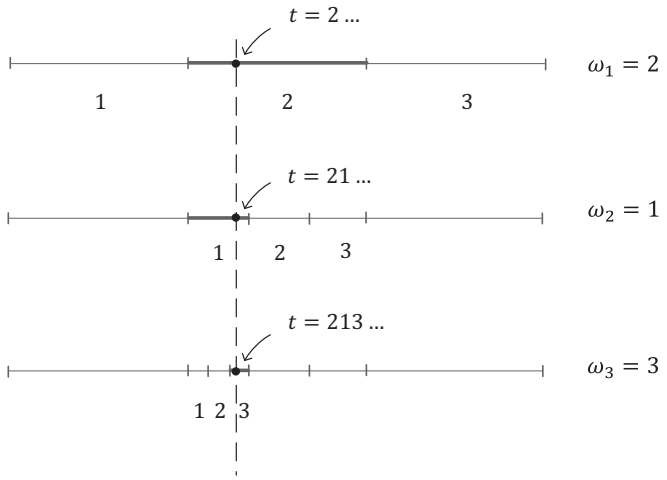
Niyetimiz, şüphesiz, eğer başarabilirsek, bu eğrilerin limitini almak ve sürekli olmasını umduğumuz (!) bu limit eğrisinin örten olduğunu göstermek!

Böyle parçalı fonksiyonlarla ve onların yinelemeleriyle uğraşmak biraz tatsız olabileceğinden, bu problemleri daha doğal bir şekilde halletmek için, YFS teorisinde çok kullanılan bir "adresleme" yöntemine başvurmak istiyoruz.

Noktaların adresleri

Bir $t \in [0,1]$ noktasını "verme"nin, ya da onun yerini (pozisyonunu, konumunu) belirlemenin, veya başka bir ifadeyle, onun "adres"ini belirtmenin yolu nedir? Bunun birçok yolu var, ama bir tanesini herkes biliyor: Örneğin, t'nin ondalık açılımını verebiliriz. Bizim buradaki amacımıza daha iyi hizmet edecek şekilde, şöyle bir yola da başvurabiliriz: $[0,1]$ aralığını $\left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ şeklinde üç alt-aralığın birleşimi olarak düşünelim ve söz konusu t sayısının hangi alt-aralığa düştüğünü şöyle belirtelim: Bu alt-aralıklara sırasıyla $1, 2$ ve 3 numaralarını verelim ve t'nin düştüğü aralığın numarasına ω_1 diyelim, bunu da bir kenara yazalım. (t sayısı kazara $\frac{1}{3}$ veya $\frac{2}{3}$ ise, iki seçenek olacak, ama bunların herhangi birinin alınmasına izin verelim.) Sonra, t'nin düştüğü aralığı benzer şekilde üçe bölelim ve

nereye düştüğümüze bağlı olarak, ikinci kademedeki $\omega_2 \in \{1, 2, 3\}$ sayısını seçelim ve bunu da öncekinin yanına (sağına) yazalım: $\omega_1\omega_2$. (Bkz. Şekil 8)



Şekil 8

Artık böyle devam ederek, sonsuz bir $\omega_1\omega_2\omega_3 \ldots \omega_n \ldots$ dizisi oluşturabiliriz. Şüphe yok ki bu "adres" verildiğinde t'nin $[0, 1]$ içindeki yeri belirlenmiş olur. Bu yöntemin küçük bir kusuru, adreslerin tek türlü belirli olmamasıdır. Örneğin $1333\ldots$ adresi ile $2111\ldots$ adresi bizi aynı $t = \frac{1}{3}$ noktasına götürecektir. Aslında küçük bir tedbirle buna mani olabilirdik, ama bu çok-değerlilik işin doğasında var ve böyle bırakmak daha iyi. Ondalık yazımda da aynı durum söz konusu değil mi? Bu arada, $\omega_1\omega_2\omega_3 \ldots$ dizisi ile, bu dizinin (adresin) belirlediği t sayısının 3 tabanına göre ("üçtelik") yazımı arasındaki şirin ilişkiyi bulmanız iyi bir alıştırma olurdu.

Şimdi bu adresler üzerinde yapılabilecek doğal bir işleme değinmek istiyoruz: $\omega_1\omega_2\omega_3 \ldots$ adresine sahip bir $t \in [0, 1]$ noktası verildiğinde (artık bu durumda $t = \omega_1\omega_2\omega_3 \ldots$ yazacağız), bu dizinin ilk terimi atılsa ne olur? Yani $\omega_2\omega_3 \ldots$ adresi hangi $t' \in [0, 1]$ noktasını temsil eder?

Adresleme sisteminin mantığına bakacak olursak, t noktasının ω_1 numaralı ilk 1/3'lük parça içindeki konumu neyse, t' noktasının $[0, 1]$ aralığı içindeki konumu da o olacaktır. Yani, $\omega_1 = 1$ ise, $t' = 3t$; $\omega_1 = 2$ ise, $t' = 3t - 1$ ve $\omega_1 = 3$ ise, $t' = 3t - 2$ olacaktır. Bir adresteki ilk terimi atma operasyonuna "kaydırma" (shift) dönüşümü adı veriliyor ve genellikle σ ile gösteriliyor: $\sigma(\omega_1\omega_2\omega_3 \ldots) = \omega_2\omega_3 \ldots$.

Buna göre $t = \omega_1\omega_2\omega_3 \ldots$ ile $t' = \omega_2\omega_3 \ldots$ arasındaki ilişkiyi $t' = \sigma(t)$ şeklinde ifade edebiliriz.

Adreslerin faydaları

Şimdi bakın (1) tanımını bu kaydırma dönüşümü yardımıyla ne güzel ifade edebiliyoruz:

$$\gamma_1 : [0, 1] \to D, \;\; \gamma_1(t) = f_{\omega_1}(\gamma_0(\sigma(t))) \; !$$

Bunu yineleyerek,

$$\begin{aligned}\gamma_2 : [0,1] \to D,\ \ \gamma_2(t) &= f_{\omega_1}(\gamma_1(\sigma(t))) \\ &= f_{\omega_1}(f_{\omega_2}(\gamma_0(\sigma^2(t)))) \\ &= (f_{\omega_1} \circ f_{\omega_2})(\gamma_0(\sigma^2(t)))\end{aligned}$$

ve k. kademede,

$$\gamma_k : [0,1] \to D,\ \ \gamma_k(t) = (f_{\omega_1} \circ f_{\omega_2} \circ \ldots \circ f_{\omega_k})(\gamma_0(\sigma^k(t)))$$

yazabiliriz. (Burada σ^k, kaydırma dönüşümünün k defa peşpeşe uygulanmışıdır. Aşağıda $f_{\omega_1} \circ f_{\omega_2} \circ \ldots \circ f_{\omega_k}$ ifadesini bazen $f_{\omega_1\omega_2\ldots\omega_k}$ şeklinde kısaltacağız.)

Lafı biraz uzatmak pahasına, ama manzaranın iyice berraklaşması için, birkaç şey daha söylemek istiyoruz.

$\psi_1, \psi_2, \psi_3 : [0,1] \to [0,1]$ fonksiyonlarını, $\psi_1(t) = \frac{1}{3}t$, $\psi_2(t) = \frac{1}{3}t + \frac{1}{3}$ ve $\psi_3(t) = \frac{1}{3}t + \frac{2}{3}$ şeklinde tanımlarsak, bu fonksiyonlar $[0,1]$ üzerinde (hatta isterseniz $\mathbb{R}$ üzerinde) bir YFS oluşturur ve bunun çekicisi $[0,1]$ aralığıdır:

$$[0,1] = \psi_1([0,1]) \cup \psi_2([0,1]) \cup \psi_3([0,1]).$$

Bu YFS yardımıyla, bir $t \in [0,1]$ noktasının $\omega_1\omega_2\omega_3\ldots$ adresine şu gözle de bakabiliriz:

t noktası ilk kademede ω_1. parçada ise: $t \in \psi_{\omega_1}([0,1])$,

t noktası 2. kademede ω_2. parçada ise: $t \in (\psi_{\omega_1} \circ \psi_{\omega_2})([0,1])$,

$\vdots$

t noktası k. kademede ω_k. parçada ise: $t \in (\psi_{\omega_1} \circ \psi_{\omega_2} \circ \ldots \circ \psi_{\omega_k})([0,1])$.

ψ_1, ψ_2, ψ_3 büzücü benzerliklerinin her uygulamasında $[0,1]$ aralığının uzunluğu $\frac{1}{3}$ oranında küçüldüğünden, $k \to \infty$ için bu iç-içe geçmiş aralıkların arakesitinde tek bir nokta kalır; tabii o da t noktasıdır:

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \psi_{\omega_1\omega_2\ldots\omega_k}([0,1]) = \{t\}.$$

Bunu istersek şöyle de yazabiliriz:

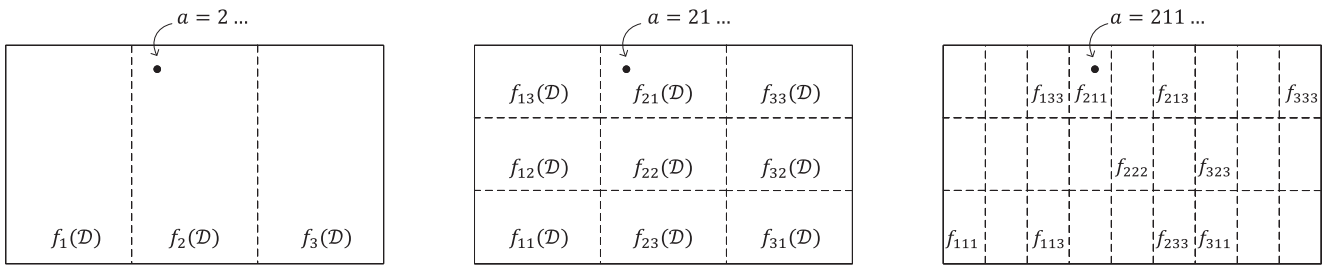
Herhangi bir $u \in [0,1]$ için $t = \lim_{k\to\infty} \psi_{\omega_1\omega_2\ldots\omega_k}(u)$.

Bunu da sembolik olarak şöyle yazabiliriz: $t = \psi_{\omega_1\omega_2\omega_3\ldots}(u)$.

$[0,1]$ aralığı üzerinde, $\{\psi_1, \psi_2, \psi_3\}$ yinelemeli fonksiyon sistemi ile ilişkilendirerek açıklamaya çalıştığımız adresleme yöntemini, $D = [0,1] \times [0, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ dikdörtgenine ve $\{f_1, f_2, f_3\}$ yinelemeli fonksiyon sistemine de uygulayabiliriz: Bir $a \in D$ için $a = \omega_1\omega_2\omega_3\ldots$ olması demek, a noktasının, D dikdörtgeninin ω_1. parçasının (yani $f_{\omega_1}(D)$'nin) içindeki ω_2. parçanın (yani $(f_{\omega_1} \circ f_{\omega_2})(D)$'nin) içindeki ω_3. parçanın (yani $(f_{\omega_1} \circ f_{\omega_2} \circ f_{\omega_3})(D)$'nin) içindeki $\ldots$ nokta

olması demektir. Tabii a'nın başka adresleri de olabilir, ama bu adrese sahip nokta tektir (Şekil 9):

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} f_{\omega_1\omega_2\ldots\omega_k}(D) = \{a\}.$$



Şekil 9

Sonuca doğru

Artık ortalığı yavaş yavaş toparlayabiliriz. Aslında buraya kadar anlattıklarımızın hepsi genel kültür olup, ispata şimdi başladığımızı düşünebiliriz.

Öncelikle şuna işaret edelim ki, inşa ettiğimiz $\gamma_k : [0,1] \to D, \gamma_k(t) = f_{\omega_1\omega_2\ldots\omega_k}(\gamma_0(\sigma^k(t)))$ eğrilerinin oluşturduğu dizi, düzgün (uniform) bir Cauchy dizisidir. Herhangi bir $t \in [0,1]$ noktasını sabitleyip,

$$\gamma_0(t), \gamma_1(t), \gamma_2(t), \ldots$$

dizisine baktığımızda, k ve $l \in \mathbb{N}$ sayıları yeterince büyük seçildiğinde $\gamma_k(t)$ ve $\gamma_l(t) \in D$ noktaları D kümesinin geometrik olarak yeterince küçülmüş bir resmi içinde kalacaklarından, $\|\gamma_k(t) - \gamma_l(t)\|$ büyüklüğü, t'den bağımsız olarak (uniform olarak) yeterince küçük tutulabilir. ($\epsilon > 0$ verildiğinde, hangi N için, $k, l \geq N$ olduğunda $\|\gamma_k(t) - \gamma_l(t)\| < \epsilon$ olacağını, D'nin her adımdaki $\frac{1}{\sqrt{3}}$ oranındaki küçülmesinden hemen bulabilirsiniz.) Demek ki, bu $\gamma_0(t), \gamma_1(t), \gamma_2(t), \ldots$ dizisi bir $\gamma : [0,1] \longrightarrow D$ sürekli fonksiyonuna yakınsar. İşte bu fonksiyon, aradığımız, alan dolduran bir eğri olacak! Şimdi bunun ifadesini bir başka şekilde yazalım:

Alan dolduran bir eğrinin pek doğal bir ifadesi

$\gamma_k(t) = f_{\omega_1\omega_2\ldots\omega_k}(\gamma_0(\sigma^k(t)))$ olduğundan,

$\gamma(t) = \lim_{k\to\infty} \gamma_k(t) = \lim_{k\to\infty} f_{\omega_1\omega_2\ldots\omega_k}(\gamma_0(\sigma^k(t)))$ olur. $\gamma_0(\sigma^k(t)) \in D$ olup, $\bigcap_{k=1}^{\infty} f_{\omega_1\omega_2\ldots\omega_k}(D)$ arakesiti de tek bir noktadan ibaret olduğundan, demek ki $\lim_{k\to\infty} \gamma_k(t)$ noktası bu noktadır! Bir başka gösterimle,

$$\{\gamma(t)\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} f_{\omega_1\omega_2\ldots\omega_k}(D) = f_{\omega_1\omega_2\omega_3\ldots}(D)$$

yazılabilir. Diğer yandan, $\{t\} = \psi_{\omega_1\omega_2\omega_3\ldots}([0,1])$ olduğundan, demek ki, adresler cinsinden yazacak olursak,

$$\gamma(\omega_1\omega_2\omega_3\ldots) = \omega_1\omega_2\omega_3\ldots$$

olmaktadır! Burada soldaki $\omega_1\omega_2\omega_3\ldots$ adresi, $t \in [0,1]$ noktasının $\{\psi_1, \psi_2, \psi_3\}$ sistemi cinsinden adresidir; sağdaki $\omega_1\omega_2\omega_3\ldots$ adresi de, $\gamma(t) \in D$ noktasının $\{f_1, f_2, f_3\}$ sistemi cinsinden adresidir.

Herhalde bundan daha güzel bir ifade olamaz. γ eğrimiz, $[0,1]$ içindeki $t = \omega_1\omega_2\omega_3\ldots$ noktasını almakta ve bunu D içindeki aynı adresli noktaya göndermektedir! Böylece bu eğrinin örten olduğunu da görmüş oluyoruz, çünkü bize D içinde herhangi bir nokta verildiğinde, bu nokta $[0,1]$ içindeki aynı adresli noktadan gelmektedir!

Böylece bizim de alan dolduran bir eğrimiz oldu. Artık bu ispatımız "Kitaptan Deliller"e girer mi, girmez mi, orasını tabii bilemiyoruz.

Son olarak şuna işaret edelim ki, $\gamma : [0,1] \to D$ fonksiyonu (eğrisi) sürekli ve örten olmakla birlikte, şüphesiz bire-bir olamaz. Aksi halde (kompakt bir uzaydan, bir Hausdorff uzayına giden sürekli bir fonksiyon olarak, tersi de sürekli, yani) bir homeomorfizm olurdu ki, $[0,1]$ ve D uzayları bildiğiniz gibi homeomorf (yani topolojik olarak denk) değildir. (Bunu en kolay nasıl gösterebilirsiniz?)

Son şekillerimiz (Şekil 10-12), γ altında görüntüleri aynı olan iki noktanın encamını gösteriyor.

$t_1 = 11333\ldots$ noktası için, $k \geq 2$ olmak üzere,

$$\sigma^k(t_1) = 333\ldots, \quad \gamma_0(333\ldots) = \gamma_0(1) = \left(1, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \text{ ve } f_3\left(1, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(1, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

olduğundan,

$$\gamma_k(t_1) = f_1 f_1 f_3 \ldots f_3(\gamma_0(\sigma^k(t_1))) = f_1 f_1\left(1, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3\sqrt{3}}\right)$$

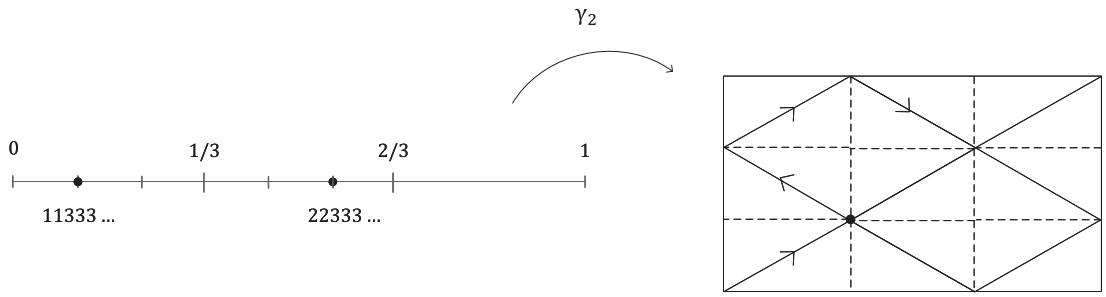
ve dolayısıyla,

$$\gamma(t_1) = \lim_{k\to\infty} \gamma_k(t_1) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3\sqrt{3}}\right)$$

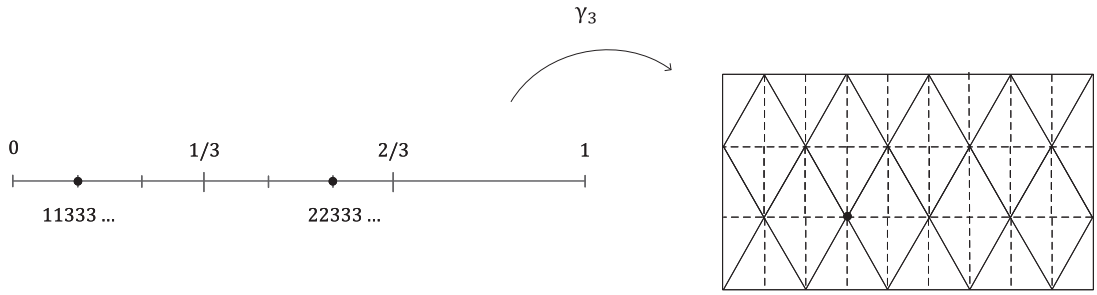
olur. Benzer şekilde, $t_2 = 22333\ldots$ noktası için de, $k \geq 2$ olmak üzere,

$$\gamma_k(t_2) = f_2 f_2\left(1, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3\sqrt{3}}\right) \text{ ve } \gamma(t_2) = \lim_{k\to\infty} \gamma_k(t_2) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3\sqrt{3}}\right),$$

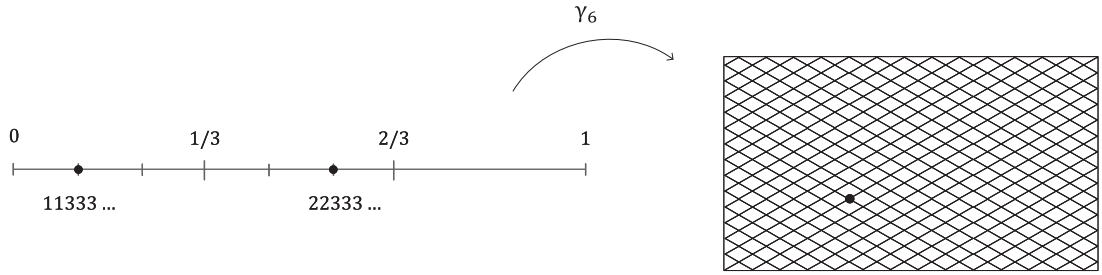
yani sonuç itibariyle $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ olur.



Şekil 10



Şekil 11



Şekil 12

Bu YFS'lerle oynamayı sevdiyseniz, artık sizin de pekala bir alan dolduran eğriniz olabilir!

Kaynaklar

[1] Aigner, M., Ziegler, G. M., (Çeviren: A. Muhammed Uludağ), *Kitap'tan Deliller*, İstanbul Bilgi Üniversitesi Yayınları, 2009.

[2] Barnsley, M. F., *Fractals Everywhere*, Academic Press, Boston, 1988.

[3] Sagan, H., *Space-Filling Curves*, Springer Science & Business Media, 2012.