WEİL SANILARI

27-31 Ağustos 2018
Çakılarası Matematik Köyü
Eskişehir

K. İlhan İkeda, Semih Özlem

Çakılarası Matematik Köyü Yayınları No. 2

İçindekiler

Önsöz

Bu notlar 27-31 Ağustos 2018 tarihleri arasında *Çakılarası Matematik Köyü'nde* tertiplenmiş olan *"Weil Sanıları"* adlı etkinlikte işlemiş olduğum, amacı Weil sanılarından bazılarının ispatlanması olan toplam 20 saatlik derslerin gözden geçirilmiş halini oluşturmaktadır.

Çakılarası Matematik Köyü'nde derslerime katılan ve dikkatle dersleri takip eden tüm öğrencilere, beni doğanın güzel bir parçası olan Çakılarası Matematik Köyüne üçüncü defa davet eden ve bir hafta boyunca ağırlayan Prof. Dr. Şahin Koçak'a sonsuz ve kalpten teşekkürlerimi sunarım.

K. İlhan İkeda

Bogazici Üniversitesi

Matematik Bölümü

İstanbul

Bölüm 1

Hatırlatmalar

Dwork, Grothendieck ve Deligne Weil sanılarını ispatlamıştır.

İlgili makale: Andre Weil, Number of solutions of equations in finite fields, Bulletin AMS, 1948.

Tanım 1. Bir cisim k üzerindeki mutlak değer, cisimden negatif olmayan reel sayılara tanımlı ve aşağıdaki özellikleri sağlayan bir gönderimdir (fonksiyondur):

$|\cdot| : k \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ gönderimi, $x, y \in k$ için:

(i) $|x| = 0$ ancak ve ancak $x = 0$

(ii) $|xy| = |x||y|$

(iii) $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Aynı topolojik uzayı tarif eden, ya da aynı Cauchy dizilerine sahip olan mutlak değerler denktir.

Teorem 1 (Ostrowski teoremi:). $\mathbb{Q}$ (rasyonel sayılar cismi) üzerinde sadece ve sadece şu mutlak değer denklik sınıfları mevcuttur:

(a) $|a|_\infty = \begin{cases} \alpha & \alpha \geq 0 \\ -\alpha & \alpha < 0 \end{cases}$ (Bu denklik sınıfından bahsedilirken sonsuz asal da denir.)

(b) Her asal p sayısı için tanımlanmış olan $\underline{p\text{−sel mutlak değer}}$:

Tanım 2. Her $n \in \mathbb{Z}$ için, $\{k \in \mathbb{Z} : p^k | n\}$ kümesinin en büyük elemanına n sayısının $p-$mertebesi denir ve $\mathrm{mer}_p(n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ ile gösterilir.

Denk bir şekilde ifadesi: $p^k | n$ ancak $p^{k+1} \not| n$ ise k doğal sayısına n sayısının $p-$mertebesi denir ve $\mathrm{mer}_p(n)$ olarak gösterilir.

Eğer bu özelliği sağlayan bir k doğal sayısı yoksa: $\mathrm{mer}_p(0) = \infty$ olarak tanımlanır.

a ve b tam sayıları için $\alpha = \frac{a}{b}$ olsun. $p-$sel mutlak değer, $|\alpha|_p = |\frac{a}{b}|_p = \frac{1}{p^{\mathrm{mer}_p(a) - \mathrm{mer}_p(b)}}$ olarak tanımlanır.

Örnek 1: $\mathrm{mer}_3(-18) = 2$, çünkü $-18 = (-1) * 2 * 3^2$.

Örnek 2: $|\frac{-18}{15}|_3 = \frac{1}{3^{\mathrm{mer}_3(-18) - \mathrm{mer}_3(15)}} = \frac{1}{3^{2-1}} = \frac{1}{3}$

Tanım 3. Her mutlak değer bir metrik tanımlar ve bu mutlak değer altında cisim işlemleri sürekli olur. Bu durum $(\mathbb{Q}, +, *, d)$ bir metrik cisim tanımlar denerek ifade edilir.

$(\mathbb{Q}, d)$ metrik uzayının tamlanışı $(\hat{\mathbb{Q}}, \hat{d})$ metrik uzayıdır ve $\mathbb{Q}$ üzerindeki $+, *$ işlemlerini $\hat{\mathbb{Q}}'$ya sürekli olacak şekilde genişletmek mümkündür.

Tanım 4. Ostrowski teoremini göz önüne alacak olursak, $|\cdot|_\infty$ altında $\mathbb{Q}'$nun tamlanışı $\mathbb{R}$, $|\cdot|_p$ altında tamlanışı da $\mathbb{Q}_p$ olarak gösterilir.

Bu cisimlere ve $\mathbb{C}$'ye yerel cisim denir.

K cismi $\mathbb{Q}_p$nin derecesi n olan bir genişlemesi olsun, ve her $x \in K$ için,

$$|x|_K = |N_{K/\mathbb{Q}_p}(x)|^{1/n}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $|.|_K$ gönderimi K üzerine tanımlı bir mutlak değerdir, ve $|.|_K$, $|.|_{\mathbb{Q}_p}$yi genişleten, yani her $\alpha \in \mathbb{Q}_p$ için, $|\alpha|_K = |\alpha|_{\mathbb{Q}_p}$ şartını sağlayan biricik mutlak değerdir.

Tanım 5. Cisim genişlemesi: F ve K cisim, K cismi Fnin altcismi ($K \subset F$ ve Fdeki toplamanın Kya kısıtlanışı Kdaki toplama, ve aynısı çarpma için de geçerli.) Bu durum

$$\begin{array}{c} K \\ | \\ F \end{array}$$

olarak gösterilir ve kısaca K/F olarak yazılır.

Örnek: $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Q}\}$, $\mathbb{Q}$ üzerinde bir cisim genişlemesi. $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ çarpmaya göre tersleri ihtiva eder.

Cisim genişlemelerinde, üstteki cisim (içeren) alttaki (içerilen) üzerinde bir vektör uzayıdır. Yani $i : K \to F$ içerme fonksiyonu olmak üzere,

$$\begin{array}{ccc} K \times F & \to & F \\ (\alpha, \beta) & \mapsto & i(\alpha) \cdot \beta \end{array}$$

gönderimi gerekli koşulları (skalar çarpma olma koşullarını) sağlar.

Örnek: $(\alpha, a + b\sqrt{2}) \mapsto (\alpha a + \alpha b\sqrt{2})$.

Örnekte, $\{1, \sqrt{2}\}$ kümesi $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$yi bir $\mathbb{Q}$ vektör uzayı olarak gördüğümüzde bir bazdır, yani doğrusal bağımsız ve gerendir. Doğrusal bağımsızlık, $\sqrt{2}$nin rasyonel olmayışının sonucudur: $a, b \in \mathbb{Q}$ için, $a + b\sqrt{2} = 0$ olsun. $b \neq 0$ ise, $\sqrt{2} = -\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ olurdu. Bu mümkün değil. O takdirde $a = b = 0$.

Diğer örnek: $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

Tanım 6. Eğer F/K cisim genişlemesinde, F cismi K üzerinde sonlu boyutlu bir vektör uzayı ise, bu boyuta (vektör uzayı boyutuna, yani $\mathrm{boyut}_K F$e) cisim genişlemesinin derecesi denir ve $[F : K]$ olarak gösterilir. F cismi, K üzerinde sonsuz boyutlu bir vektör uzayı ise $[F : K] = \infty$ olur.

Örnek $\mathrm{boyut}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = [\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = 2.$

$\bar{\mathbb{Q}}$, $\mathbb{Q}$ üzerindeki tüm polinomların köklerini ihtiva eden en küçük cisim olsun. Varsayalım ki bu $\mathbb{C}$ cisminin içine dahil edilebiliyor.

Şimdi, $\sigma : F \to \bar{K}$ halka homomorfizmalarını ele alalım. (Yukarıdaki örnekte, $\sigma : \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \to \mathbb{C}$) Bu homomorfizmaların K cismine kısıtlanışları, birim fonksiyonu versin.

Homomorfizma olma şartları: $\sigma(a + b) = \sigma(a) + \sigma(b),\ \sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$ (ve σ sıfır fonksiyonu değil.) $\sigma|_K = 1_K$ yani her $a \in K$ için, $\sigma(a) = a$

Örnekte $K = \mathbb{Q}$, ve $F = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Örneğe geri dönecek olursak, $\sigma(a+b\sqrt{2}) = a+b\sigma(\sqrt{2})$ olacak. Ayrıca, $(\sqrt{2})^2 = 2$ olduğu için, $\sigma : \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \to \mathbb{C}$ herhangi bir halka homomorfizması olduğunda, $\sigma(\sqrt{2})^2 = \sigma(2) = 2$ olacaktır. Böylece, $\sigma(\sqrt{2}) = \pm\sqrt{2}$ olmalıdır.

Örneğimizde, $\sigma_1(a + b\sqrt{2}) = a + b\sqrt{2}$ ve $\sigma_2(a + b\sqrt{2}) = a - b\sqrt{2}$ olsun. Bu durumda, norm

$$\begin{aligned} N_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}}(x) &= \sigma_1(x)\sigma_2(x) \\ &= (a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2}) \\ &= a^2 - 2b^2 \end{aligned}$$

olur.

Genelde de $\alpha \in F$, $K[x]$deki bir $p(x)$ polinomunun kökü ise, $0 = \sigma(0) = \sigma(p(\alpha)) = p(\sigma(\alpha))$ olacağından, $\sigma(\alpha)$, $p[x]$ polinomunun $\bar{K}$ daki köklerinden biridir.

Tanım 7. $\sigma_i : K \to \bar{F}$ halka homomorfizmaları, K cisminin $\bar{F}$ içine tüm yerleştirmeleri olsun. Bu durumda,

$$N_{K/F}(x) = \prod_i \sigma_i(x)$$

olarak tanımlanır.

$$\begin{array}{c} K \\ | \\ \mathbb{Q}_p \end{array}$$
ve $[K : \mathbb{Q}_p]$ sonlu olduğunda, K cismi, $|.|_K$ mutlak değerine göre tamdır.

Tanım 8.

$$\mathcal{O}_K = \{x \in K : |x|_K \leq 1\}$$

kümesine K cisminin tamsayılar halkası denir.

Bir tane maksimal ideal $P_K$ya sahiptir:

$$P_K = \{x \in K||x|_K < 1\}.$$

Tamsayılar halkasında maksimal idealde yer almayan elemanlar, yani $\mathcal{O}_K - P_K$nın elemanları $\mathcal{O}_K$da tersinirdir.

$\bar{\mathbb{Q}}_p$, $\mathbb{Q}_p$nin (p-sel sayılar cisminin) cebirsel kapanışıdır. $\bar{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p$ de cebirsel bir genişlemedir: $\mathbb{Q}_p$ katsayılı her polinom, $\bar{\mathbb{Q}}_p$de doğrusal polinom çarpanlara ayrılır. Yani her $p(x) \in \mathbb{Q}_p[x] \subset \bar{\mathbb{Q}}_p[x]$ için, $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \in \bar{\mathbb{Q}}_p$ ve pozitif tamsayılar $\mu_1, \ldots, \mu_s$ ve $c \in \mathbb{Q}_p - \{0\}$ mevcuttur öyleki

$$p(x) = c(x - \alpha_1)^{\mu_1} \ldots (x - \alpha_s)^{\mu_s}$$

olsun.

$\bar{\mathbb{Q}}_p$ cismi üzerine mutlak değerini tek türlü genişletmek mümkündür. $\alpha \in \bar{\mathbb{Q}}_p$ olduğunda, α, $\mathbb{Q}_p$ üzerine cebirsel bir eleman ve $\mathbb{Q}_p(\alpha)/\mathbb{Q}_p$ sonlu bir genişlemedir. Bu durumda,

$$|\alpha| = |N_{\mathbb{Q}_p(\alpha)/\mathbb{Q}_p}(\alpha)|_p^{\frac{1}{[\mathbb{Q}_p(\alpha):\mathbb{Q}_p]}}$$

olarak tanımlı.

Fakat $\bar{\mathbb{Q}}_p$ bu mutlak değere göre tam değil. Ω_p, $\bar{\mathbb{Q}}_p$nin tamlanışıdır ve buna Tate cismi denir. Tate cismi hem tam hem cebirsel olarak kapalıdır.

Serilerin $\Omega_p$de yakınsaklığı koşulu:

$a_n \in \Omega_p$ olmak üzere, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ $\Omega_p$de yakınsak ancak ve ancak Ω_p mutlak değerine göre $a_n \to 0$.

$a \in \Omega_p$ ve $r > 0$ için, a etrafında r yarıçaplı açık ve kapalı disk:

$$D(a; r^-) = \{x \in \Omega_p||x - a|_{\Omega_p} < r\}$$

ve

$$D(a; r) = \{x \in \Omega_p||x - a|_{\Omega_p} \leq r\}$$

olarak tanımlanır. $a = 0$ olduğunda, bunlar kısaca $D(r^-) = D(0; r^-)$ ve $D(r) = D(0; r)$ olarak gösterilir.

$f(x) \in \mathbb{Z}_p[[x]]$ biçimsel kuvvet serisi verilsin. $i = 0, 1, 2, \ldots,$ için $a_i \in \mathbb{Z}_p$ olmak üzere $f(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_Nx^N + \ldots$ olarak yazılsın.

Bu seri $x \in D(1^-)$ için yakınsaktır, çünkü $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ve

$$|a_n x^n|_{\Omega_p} = |a_n|_{\Omega_p} |x|_{\Omega_p}^n \leq |x|_{\Omega_p}^n$$

Teichmüller temsilleri

Teorem 2. p : asal. $X^p - X = 0$ denklemini çözen ve $i = 0, 1, \ldots, p-1$ için $a_i \equiv i \bmod p$ şartını sağlayan p tane $a_0, \ldots, a_{p-1}$ sayıları $\mathbb{Q}_p$ de mevcuttur.

İspat

Hensel'in lemmasını hatırlayalım:

$F(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_m x^m \in \mathbb{Z}_p[x]$ için, öyle bir $a_0 \in \mathbb{Z}_p$ olsun ki,

$$\begin{aligned} F(a_0) &\equiv 0 \bmod p \\ F'(a_0) &\not\equiv 0 \bmod p \end{aligned}$$

Bu durumda, öyle bir tek $a \in \mathbb{Z}_p$ vardır ki $F(a) \equiv 0$ ve $a \equiv a_0 \bmod p$ olsun.

Şimdi, $F(x) = x^p - x \in \mathbb{Z}_p[x]$ olsun. $F'(x) = px^{p-1} - 1$.

$i = 0, 1, \ldots, p-1 \in \mathbb{Z}_p$ için.

$$\begin{aligned} F(i) &\equiv 0 \bmod p \\ F'(i) &\equiv -1 \not\equiv 0 \bmod p \end{aligned}$$

Şimdi Hensel'in lemmasını kullanarak sonuç elde edilir.

Tanım 9. Teoremde biricik şekilde var oldukları ispatlanmış $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1} \in \mathbb{Z}_p$ sayılarına, $0, 1, \ldots, p-1$ sayılarının teichmüller temsilcileri diyeceğiz.

Bölüm 2

Kuvvet Serileri

$\log(1+X)$, $\exp(X) = e^X$, $\gamma(X,Y)$

$f(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \Omega_p[[X]]$ biçimsel kuvvet serisi verilsin. $\mathcal{O} \subseteq \Omega_p$ içinde açık küme olsun. (Yani her $\alpha \in \mathcal{O}$ için $r_\alpha > 0$ vardır öyle ki $D(a, r_\alpha^-) \subseteq \mathcal{O}$. Biz, $f(x) \in \Omega_p[[x]]$ aracılığıyla, $\mathcal{O} \to \Omega_p$ fonksiyonları tanımlamak istiyoruz.

Lemma $f(x) = \sum a_n x^n \in \Omega_p[[x]]$ verilsin. Bu durumda

$$r = r(f) = \frac{1}{\limsup |a_n|_{\Omega_p}{}^{1/n}}$$

için $f(x)$, $|x|_{\Omega_p} < r(f)$ için yakınsar ve $|x|_{\Omega_p} > r(f)$ için ıraksar.

$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin limit noktalarının kümesi E olsun. $\limsup\{x_n\} = \sup E$ olur. Her $\epsilon > 0$ için öyle bir $N_\epsilon \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ vardır ki, her $n > N_\epsilon$ için, $x_n < b + \epsilon$ olur.

Lemmanın ispatı: $x \in \Omega_p$ $|x|_{\Omega_p} < r$ ve $|x|_{\Omega_p} = (1-\epsilon)r$ şeklinde bir $1 > \epsilon > 0$ vardır.

Bu durumda,

$|a_n x^n|_{\Omega_p} = |a_n|_{\Omega_p} |x|_{\Omega_p}^n = |a_n|_{\Omega_p} (1-\epsilon)^n r^n = (r|a_n|_{\Omega_p}^{1/n})^n (1-\epsilon)^n$

$\limsup_n |a_n|_{\Omega_p}^{1/n} = \frac{1}{r}$ olduğu için

$|a_n|_{\Omega_p}^{1/n} \leq \frac{1}{r - \epsilon \frac{r}{2}}$ $n \gg n_0$

Böylece, $\lim_{n\to\infty} |a_n x^n|_{\Omega_p} \leq \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(1-\epsilon)r}{(1-\frac{\epsilon}{2})r}\right)^n = 0.$

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $|x|_{\Omega_p} < r$ şartında yakınsar.

Ödev: $|x|_{\Omega_p} > r$ için aynı ispatı değiştir.

Tanım 10 (Yakınsama yarıçapı). $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in \Omega_p[[x]]$ biçimsel kuvvet serisinin yakınsama yarıçapını

$$r = r(f) = \frac{1}{\limsup |a_n|_{\Omega_p}{}^{1/n}}$$

olarak tanımlıyoruz. $r = 0$ ya da ∞ olabilir.

$f(x) \in \Omega_p[[x]]$ ve $D(r(f)) = \{x \in \Omega_p | |x|_{\Omega_p} \leq r(f)\}$de yakınsasın. Bu durumda,

$$f : D(r(f)) \to \Omega_p$$

sürekli bir fonksiyon olur. (Ya da daha küçük bir diskde, eğer sınırda bir problem varsa.)

2.1 $\log(1 + X)$

$g(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} X^n \in \Omega_p[[X]]$. biçiminde bir kuvvet serisi verilsin. $n = 1, 2, \ldots$ için $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ olsun. Bu durumda, $|a_n|_{\Omega_p} = p^{\mathrm{mer}_p(n)}$ ve $\lim |a_n|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} p^{\mathrm{mer}_p(n)/n} = 1$

($\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{mer}_p(n)}{n} = 0.$)

O nedenle $r(g) = 1$.

Eğer $x \in \Omega_p$ $|x|_{\Omega_p} = 1$ şartını sağlıyorsa $|a_n x^n|_{\Omega_p} = |a_n|_{\Omega_p} = p^{\mathrm{mer}_p(n)} \geq 1 \neq 0$ ve $\lim_{n\to\infty} |a_n x^n|_{\Omega_p} \neq 0$ ve $|x|_{\Omega_p} = 1$ için $g(X)$ ıraksaktır.

Sonuç $g(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} X^n \in \Omega_p[[X]]$ $D(1^-) = \{x \in \Omega_p | |x|_{\Omega_p} < 1\}$ açık diskinde yakınsaktır.

Tanım 11. " $\log_p$ " ile göstereceğimiz $\log_p(1 + X) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ biçimsel kuvvet serisi

$$\log_p : D(1^-) \to \Omega_p$$

p-sel logaritma tasvirini tanımlar.

Not: $\log_p(Y)$ fonksiyonunu Y cinsinden kuvvet serisi olarak açmak, terim yer değiştirmeleri gerekeceğinden problemli.

2.2 $\exp_p(X)$

$h(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X^n \in \Omega_p[[X]]$ ve $\mathrm{mer}_p(n!) = \sum_{i=0}^{\infty} \lfloor \frac{n}{p^i} \rfloor \leq \sum \frac{n}{p^i} = \frac{n}{p-1}$. O nedenle, $|a_n|_{\Omega_p} = |\frac{1}{n!}|_p = p^{\mathrm{mer}_p(n!)} < p^{\frac{n}{p-1}}$

$|a_n|_{\Omega_p}^{1/n} < p^{\frac{1}{p-1}}$ Her $n = 0, 1, 2, \ldots$ için $p^{-\frac{1}{p-1}} < \frac{1}{|a_n|_{\Omega_p}^{1/n}}$

Yakınsama yarıçapı $r(h) \geq p^{-\frac{1}{p-1}}$.

Sonuç $x \in \Omega_p$, $|x|_{\Omega_p} < p^{-\frac{1}{p-1}}$ için $h(x)$ yakınsaktır.

Eğer $|x|_{\Omega_p} = p^{-\frac{1}{p-1}}$ ise $n = p^m$ için $\mathrm{mer}_p(n!) = \mathrm{mer}_p((p^m)!) = p^{m-1} + p^{m-2} + \ldots + p + 1 = \frac{p^m - 1}{p-1}$.

$\mathrm{mer}_p(\frac{x^n}{n!}) = p^m \mathrm{mer}_p(x) - \frac{p^m-1}{p-1} = \frac{1}{p-1}$ve

$|a_n x^n|_{\Omega_p} \not\to 0$. (Sıfıra yakınsamaz.)

Dolayısıyla $D(p^{-\frac{1}{p-1}}{}^{-})$ açık diskinde yakınsaktır.

Tanım 12. $h(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X^n \in \Omega_p[[X]]$ biçimsel kuvvet serisi $\exp_p : D((p^{-\frac{1}{p-1}})^{-}) \to \Omega_p$ gönderimi tanımlar ve bu gönderime p-sel üstel fonksiyon denir.

$\log_p(1+X)$ ve $\exp_p(X)$ fonksiyonlarının temel özellikleri:

$\log_p(1+X)$ her $x \in D(1^{-})$ için yakınsaktır. $\exp_p(X)$ her $x \in D(p^{-\frac{1}{p-1}}{}^{-})$ için yakınsaktır.

$\log_p(1+X) + \log_p(1+Y) = \log_p(1+X)(1+Y)$

$\exp_p(X)\exp_p(Y) = \exp_p(X+Y)$

$\log_p(1+\exp_p(X)-1) = X$.

$\exp_p(\log_p(1+X)) = 1+X$. her $x \in D(p^{-\frac{1}{p-1}}{}^{-})$ için.

2.3 $\gamma(X, Y)$

$$\begin{aligned}
(1+Y)^X &= \exp_p(X\log_p(1+Y)) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(X\log_p(1+Y))^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X^n (\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} Y^m)^n
\end{aligned}$$

$\gamma(X,Y) = \sum_{m,n} a_{m,n} X^m Y^n \in 1 + X\mathbb{Q}_p[[X,Y]] + Y\mathbb{Q}_p[[X,Y]]$ dahası her m, n için $a_{m,n} \in \mathbb{Z}_p$

Tanım 13. Eğer $B(T) \in \Omega_p[[T]]$ biçimsel kuvvet serisinin yakınsama yarıçapı $r(B) = \infty$ ise $B(T)$ye p-sel tam fonksiyon denir. (tam: entire)

p-sel Weierstrass hazırlık teoremi $B(T) \in \Omega_p[[T]]$ p-sel tam bir fonksiyon olsun. Bundan sonra Ω_p yi Ω ile gösterelim. Bu durumda her $R > 0$ için $P(T) \in \Omega[T]$ ve $H(T) \in 1 + T\Omega[[T]]$ vardır öyle ki, $H(T)$ $D(R)$ kapalı diskinde yakınsak ve sıfırdan farklı fonksiyon tanımlar ve $B(T) = P(T)H(T)$ olur.

Bölüm 3

Weil Sanıları

3.1 F cismi üzerinde tanımlı afin/projektif hiperyüzeyler

$\mathbb{A}^n_F = \{(x_1, \ldots, x_n) | x_i \in F\}$ F üzerindeki $n-$boyutlu afin uzay.

$F[x_1, \ldots, x_n]$ F üzerinde değişkenleri $x_1, \ldots, x_n$ olan polinom halkası

Tanım 14. $f(x_1, \ldots, x_n) \in F[x_1, \ldots, x_n]$ tarafından, $\mathbb{A}^n_F$ içinde tanımlanan hiperyüzey

$$H_f = \{P = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{A}^n_F | f(P) = 0\}$$

kümesidir. Bu hiperyüzeyin boyutu $\mathrm{boyut} H_f = n - 1$dir.

$\mathbb{P}^n_F$ F üzerindeki $n-$boyutlu projektif uzay, $\mathbb{A}^{n+1}_{\mathbb{F}} - \{(0, \ldots, 0)\}/\sim$ denklik sınıfları kümesidir. $\vec{x} = (x_0, \ldots, x_n)$ ve $\vec{y} = (y_0, \ldots, y_n)$, $\mathbb{A}^{n+1}_{\mathbb{F}} - \{(0, \ldots, 0)\}$ kümesinin iki elemanı olsun. $\vec{x} \sim \vec{y}$ ancak ve ancak $\vec{y} = \lambda \vec{x}$ (yani her $i = 0, \ldots, n$ için $y_i = \lambda x_i$) olacak şekilde bir $\lambda \in F - \{0\}$ varsa. Bu $\mathbb{A}^{n+1}_{\mathbb{F}} - \{(0, \ldots, 0)\}$ üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

$(x_0, \ldots, x_n)'$nin ait olduğu denklik sınıfı $[x_0 : \ldots : x_n] = \{(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) | \lambda \in F - \{0\}\}$ olur.

Böylece $\mathbb{P}^n_F = \{[x_0 : \ldots : x_n] | (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{A}^{n+1}_F - \{(0, \ldots, 0)\}\}$ olur. (Not: projektif n uzay, afin $n+1$ uzaydaki $(0, \ldots, 0)$ noktasından geçen doğrular kümesidir.)

Projektif uzaylar ile afin uzaylar arasında ilişki vardır.

$\mathbb{A}^n_F \to \mathbb{P}^n_F$ gömmesi mevcut ve

$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto [1 : x_1 : \ldots : x_n]$ her $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{A}^n_F$ için.

Dolayısıyla

$\mathbb{P}^n_F = \mathbb{A}^n_F \cup \{[0 : x_1 : \ldots : x_n] | (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{A}^n_F - \{(0, \ldots, 0)\}\} = \mathbb{A}^n_F \cup \mathbb{P}^{n-1}_F$

$\lambda \neq 0$ ise $[\lambda : x_1 : \ldots : x_n] = [1 : \frac{x_1}{\lambda} : \ldots : \frac{x_n}{\lambda}]$ olacağından, $\mathbb{P}^n_F = \mathbb{A}^n_F \cup \mathbb{P}^{n-1}_F$ olacaktır. Devam edersek:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_F^n &= \mathbb{A}_F^n \cup \mathbb{A}_F^{n-1} \cup \mathbb{P}_F^{n-2} \\
&\vdots \\
\mathbb{P}_F^n &= \mathbb{A}_F^n \cup \mathbb{A}_F^{n-1} \cup \ldots \cup \mathbb{A}_F^1 \cup \{*\}
\end{aligned}$$

olur. Burada $\{*\} = \{[0:0:\ldots:0:1]\} = \mathbb{A}_F^0$ dir.

$x_0^{k_0} \ldots x_n^{k_n} \in F[x_0, \ldots, x_n]$ polinomuna monom denir ve monomun derecesi $\mathrm{derece}(x_0^{k_0} \ldots x_n^{k_n}) = k_0 + \ldots + k_n$ olarak tanımlanır.

$p(x_0, \ldots, x_n) \in F[x_0, \ldots, x_n]$ polinomu eğer derecesi aynı olan polinomların toplamı ise bu polinoma homojen denir. Derecesi ayrıca belirtilir.

(Alternatif denk tanım: $p(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^k p(x_0, \ldots, x_n)$ her $\lambda \in F$ olacak şekilde bir k pozitif tam sayısı varsa. $k = 0$ durumu ise, sabit polinomlara karşılık gelmektedir.)

Örnek: $P(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^3 + 7x_1x_2^2 - x_2^3 + x_1x_3^2$ derecesi 3 olan $\mathbb{Q}$ üzerinde homojen bir polinomdur.

Homojenleştirme:

$P(x_1, \ldots, x_n) \in F[x_1, \ldots, x_n]$ polinomunun homojen tamlanışı ile $d = \mathrm{derece}(P)$ yani P polinomunun monomlarının derecesinin maksimumu olmak üzere,

$$\tilde{P}(x_0, \ldots, x_n) = x_0^d P(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}) \in F[x_0, \ldots, x_n]$$

homojen polinomu kastedilir.

Örnek $P(x_1, x_2, x_3) = x_3^3 - 3x_1x_2x_3 + x_1 + 1$ olsun. Bu durumda

$$\tilde{P}(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_0^3 P(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \frac{x_3}{x_0}) = x_3^3 - 3x_1x_2x_3 + x_1x_0^2 + x_0^3$$

olur.

$\tilde{f}(x_0, \ldots, x_n) \in F[x_0, \ldots, x_n]$ homojen polinomu verilsin ve $\tilde{f}(x_0, \ldots, x_n) = 0$ olsun. Bu durumda $\tilde{f}$ polinomu $[x_0 : \ldots : x_n]$ denklik sınıfındaki her noktada sıfır değerini alır.

$$\tilde{H}_{\tilde{f}} = \{[x_0 : \ldots : x_n] | \tilde{f}(x_0, \ldots, x_n) = 0\} \subset \mathbb{P}_F^n$$

$\tilde{f}$ homojen polinomunun $\mathbb{P}_F^n$ üzerinde tanımladığı projektif hiperyüzey denir.

$f(x_1, \ldots, x_n) \in F[x_1, \ldots, x_n]$ verilsin ve $\tilde{f}$ $f$nin homojen tamlanışı olsun. $\tilde{H}_{\tilde{f}}$'e H_f afin hiperyüzeyinin projektif tamlanışı denir.

Hiperyüzeyler ve cisim genişlemeleri:

K/F bir cisim genişlemesi olsun. Bu durumda, $f(x_1,\ldots,x_n)\in F[x_1,\ldots,x_n]\subset K[x_1,\ldots,x_n]$ olur.

Tanım 15. $H_f$nin "$K-$noktaları "

$$H_f(K)=\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{A}_K^n|f(x_1,\ldots,x_n)=0\}$$

olarak tanımlanır.

Eğer $\tilde{f}(x_0,\ldots,x_n)\in F[x_0,\ldots,x_n]\in F[x_0,\ldots,x_n]\subset K[x_0,\ldots,x_n]$ homojen polinom ise $\tilde{H}_{\tilde{f}}$nın $K-$ noktaları

$$\tilde{H}_{\tilde{f}(K)}=\{[x_0:x_1:\ldots:x_n]\in\mathbb{P}_K^n|\tilde{f}(x_0,x_1,\ldots,x_n)=0\}$$

olarak tanımlanır.

3.2 Hiperyüzeylerin Zeta fonksiyonu

Bir $f(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{F}_q[x_1,\ldots,x_n]$ polinomunun tanımladığı H_f hiperyüzeyinin Zeta fonksiyonu bu kısımda tanımlanmaktadır.

$F=\mathbb{F}_q$ ($q=p^f$ elemanlı sonlu bir cisim.)

$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}=\mathbb{F}_p=\{\bar{0},\bar{1},\ldots,\overline{p-1}\}$.

F

$|$ ve $[F:\mathbb{F}_p]=f$ ise $|F|=p^f$ çünkü $F=\mathbb{F}_p\times\ldots\mathbb{F}_p=(\mathbb{F}_p)^f$

$\mathbb{F}_p$

Dikkat: mertebesi f olan (izomorfizmaya kadar) sadece bir tane sonlu cisim vardır.

K/F sonlu bir cisim genişlemesi ve $[K:F]=s$ ve $|F|=q$ olsun.

$\mathbb{P}_K^n=\{[x_0:x_1:\ldots:x_n]|x_0,x_1,\ldots,x_n\in K\}$ sonlu olur.

$\mathbb{P}_K^n=\amalg_{i=0}^n\mathbb{A}_k^i$ ve $q^{sn}+q^{s(n-1)}+\ldots+q^s+1=\frac{q^{s(n+1)}-1}{q^s-1}=\sharp(\mathbb{P}_K^n)$ olur.

$f(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{F}_q[x_1,\ldots,x_n]$ verilsin.

$\sharp H_f(K)$, H_f'nin $K-$noktalarının sayısı , sonludur, ve

$$N_s=\sharp H_f(K)\leq q^{sn}$$

olur.

$\tilde{f}(x_0,\dots,x_n) \in \mathbb{F}_q[x_0,\dots,x_n]$ homojen polinomu verilsin. Bu durumda $\tilde{H}_{\tilde{f}}(\mathbb{F}_{q^s})$, yani $\tilde{H}_{\tilde{f}}$ projektif hiperyüzeyinin $\mathbb{F}_{q^s}-$noktalarının N_s sayısı sonludur ve

$$N_s \leq \frac{(q^s)^{n+1}-1}{q^s-1}$$

olur.

Tanım 16. $f(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{F}_q[x_1,\dots,x_n]$ polinomunun tanımladığı H_f hiperyüzeyinin $Z(H_f/\mathbb{F}_q;T)$ Hasse-Weil zeta fonksiyonu:

$$Z(H_f/\mathbb{F}_q;T) = \exp\left(\sum_{s=1}^{\infty} \frac{N_s}{s} T^s\right)$$

biçimsel kuvvet serisi ile tanımlanır.

Burada $\exp(T) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} T^s \in \mathbb{Q}[[T]]$ olacaktır.

Uyarı $Z(H_f/\mathbb{F}_q;T) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!}\left(\sum_{t=1}^{\infty} \frac{N_t}{t} T^t\right)^s = A_0 + A_1 T + A_2 T^2 + \dots$ ve $A_0 = 1, A_1 = N_1, A_2 = N_1^2 + \frac{N_2}{2} + \dots$ olacaktır.

Ödev: Tümevarımla $A_n \in \mathbb{Q}$ olacağını gösteriniz.

3.2.1 Zeta fonksiyonunun temel özellikleri

$Z(H_f/\mathbb{F}_q;T) \in \mathbb{Q}[[T]]$ biçimsel kuvvet serisinin temel özellikleri:

1. $Z(H_f/\mathbb{F}_q;T) \in \mathbb{Z}[[T]]$ olur ve katsayıları pozitiftir.

2. $Z(H_f/\mathbb{F}_q;T)$ nin T^j katsayısı $\leq q^{nj}$ olur.

3. Aşağıdaki önermeler denktir:

(a) $Z(H_f/\mathbb{F}_q;T)$ bir rasyonel fonksiyondur: $P(T), Q(T) \in \mathbb{C}[T]$ vardır öyle ki $Z(H_f/\mathbb{F}_q;T) = \frac{P(T)}{Q(T)}$ olsun.

(b) Öyle (sonlu sayıda) $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{C}$ vardır ki, $s = 0,1,2,\dots$ için,

$$N_s = \sum_j \beta_j^s - \sum_i \alpha_i^s$$

olsun.

Temel özelliklerin ispatı

(1) $G_s = \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_{q^s})$ olsun. $s = 1,2,\dots$. $G_1 = \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_q, \mathbb{F}_q)$.

G_s grubu $H_f(\bar{\mathbb{F}}_q)$ hiperyüzeyine etki eder. Her $\tau \in G_s = \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_q, \mathbb{F}_{q^s})$ ve her $(x_1,\dots,x_n) \in H_f(\bar{\mathbb{F}}_q)$ için, aşağıdaki etki mevcuttur:

$$(x_1,\dots,x_n) \mapsto (\tau(x_1),\dots,\tau(x_n))$$

$f(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{F}_q[x_1,\ldots,x_n]$ ve $(x_1,\ldots,x_n) \in H_f(\bar{\mathbb{F}}_q)$ için, $f(x_1,\ldots,x_n) = 0$ ve $0 = \tau(0) = \tau(f(x_1,\ldots,x_n)) = f(\tau(x_1),\ldots,\tau(x_n))$ olacağından, $(\tau(x_1),\ldots,\tau(x_n)) \in H_f(\bar{\mathbb{F}}_q)$ olacaktır.

Sonuç olarak,

$$
\begin{aligned}
H_f(\bar{\mathbb{F}}_q)^{G_s} &= \{(x_1,\ldots,x_n) \in H_f(\bar{\mathbb{F}}_q) | \tau(x_1,\ldots,x_n) = (x_1,\ldots,x_n)\} \\
&= H_f(\bar{\mathbb{F}}_q) \cap \mathbb{A}^n_{\mathbb{F}_{q^s}} \\
&= H_f(\mathbb{F}_{q^s})
\end{aligned}
$$

olur. (Temel Galois teorisinden dolayı.) Burada A^G, G grubu bir A kümesi üzerine etki ettiğinde, bu etki tarafından sabit bırakılan elemanlardan oluşur: $A^G = \{a \in A | ga = a\}$.

$\underline{x} = (x_1,\ldots,x_n) \in H_f(\bar{\mathbb{F}}_q)$ olsun. $[\underline{x}]$ ile $\underline{x}$'in G_1 grup etkisi altındaki yörüngesini ifade edelim:

$[\underline{x}] = \{\underline{x}^\sigma | \sigma \in G_1\}$ olsun.

$Y = H_f(\bar{\mathbb{F}}_q)/G_1 = \{[\underline{x}] : x \in H_f(\bar{\mathbb{F}}_q)\}$ ile G_1 grup etkisi altında $H_f(\bar{\mathbb{F}}_q)$'nun yörüngeler kümesini ifade edelim.

$[\underline{x}]$, $H_f(\bar{\mathbb{F}}_q)$ kümesinin sonlu bir altkümesidir. $x_1,\ldots,x_n \in \bar{\mathbb{F}}_q$ olduğu için, $x_1,\ldots,x_n$ elemanları $\mathbb{F}_q$ cismi üzerinde cebirseldir. Olası en küçük $0 < s \in \mathbb{Z}$ pozitif tamsayısını seçelim, öyle ki

$$x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{F}_{q^s}$$

olsun.

Bu durumda, her $\sigma \in G_1$ için,

$$\sigma(x_1),\ldots,\sigma(x_n) \in \mathbb{F}_{q^s}$$

olsun. Böylece

$[\underline{x}] \subset \mathbb{F}_{q^s}$ olur ve sonuç olarak $\sharp[\underline{x}] \leq (q^s)^n$ olur.

Tanım 17. $[\underline{x}] \in Y$ için, $\underline{x}$in $[\underline{x}]$ yörüngesinin derecesi, $\mathrm{derece}[\underline{x}] = \sharp[\underline{x}]$ ($[\underline{x}]$'in eleman sayısı) olarak tanımlanır.

$x = (x_1,\ldots,x_n) \in H_f(\mathbb{F}_{q^s})$ olsun öyle ki, $x \notin H_f(\mathbb{F}_{q^t})$ her $t|s$ (yani s, x noktasının dahil olduğu $H_f(\mathbb{F}_{q^s})$ kümeleri arasında en küçüğü.)

$\mathbb{F}_{q^s} = \mathbb{F}_q(\xi)$

$|$

$\mathbb{F}_{q^t}$.

$|$

$\mathbb{F}_q$

Bu durumda, $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{F}_{q^s}$ elemanlarının birisi (buna x_{i_0} diyelim) $\mathbb{F}_{q^s} = \mathbb{F}_q(x_{i_0})$ şartını sağlamak zorunda. Yani x_{i_0}, $\mathbb{F}_{q^s}/\mathbb{F}_q$ genişlemesinin bir primitif elemanı olmak zorunda. (Böyle olmasaydı , daha küçük bir s için nokta dahil olurdu.)

derece$[\underline{x}]$ yörünge boyutu (büyüklüğü, eleman sayısı).

$\sigma(x_{i_0})$ için tam olarak s tane seçenek mevcuttur, çünkü

$$\text{derece}(\min \text{polinom}_{x_{i_0}}(x)) = s$$

ve derece$[\underline{x}] = s$.

<u>Yörüngelerin N_s katsayılarına katkısı</u>

$\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in H_f(\mathbb{F}_q)$ için derece$[\underline{x}] = t$ olsun. Bu durumda, $[\underline{x}]$ yörüngesinin $N_s = \sharp H_f(\mathbb{F}_{q^s})$ e katkısı : $\begin{cases} = t & \text{eğer } t|s \text{ ise} \\ = 0 & \text{eğer } t \not| s \text{ ise} \end{cases}$

<u>İspat:</u>

1. durum: $t|s$

$\underline{x} \in H_f(\mathbb{F}_{q^t}) \subset H_f(\mathbb{F}_{q^s})$

$[\underline{x}] = \{x^\sigma | \sigma \in G_1\} \subset H_f(\mathbb{F}_{q^t}) \subset H_f(\mathbb{F}_{q^s})$

derece$[\underline{x}] = t$nin $\sharp H_f(\mathbb{F}_{q^s})$e katkısı vardır.

2. durum: $t \not| s$ $\mathbb{F}_{q^t} \not\subset \mathbb{F}_{q^s}$

$[\underline{x}]$ yörüngesinin $Z(H_f/\mathbb{F}_q; T)$ fonksiyonuna katkısı yok.

O halde,

$$\begin{aligned}
\exp(\sum_{\substack{s \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\ t|s}} \frac{t}{s} T^s) &= \exp(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{t}{jt} T^{jt}) \\
&= \exp(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} T^{jt}) \\
&= \exp(-\log(1 - T^t)) \\
&= \frac{1}{1 - T^t}
\end{aligned}$$

Sonuç olarak,

$$Z(H_f/\mathbb{F}_q;T) = \prod_{[x]\in Y} \frac{1}{1-T^{\text{derece}[x]}}$$

$$= \prod_{[x]\in Y} (1+T^{\text{derece}[x]} + T^{2\text{derece}[x]} + \ldots) \in \mathbb{Z}_{>0}[[T]]$$

(2) Gerçekten de, $1 \leq s \in \mathbb{Z}$ için, $N_s = \sharp(H_f(\mathbb{F}_{q^s}) \leq \sharp(\mathbb{A}^n_{\mathbb{F}_{q^s}})$ ve

$\sharp(\mathbb{F}^n_{q^s}) = q^{sn}$

Zeta fonksiyonunun katsayıları $\exp\left(\sum_{s=1}^{\infty} \frac{q^{ns}}{s} T^s\right)$ biçimsel kuvvet serisinin katsayılarından küçük eşittir.

$$\begin{aligned}
\exp\left(\sum_{s=1}^{\infty} \frac{q^{ns}}{s} T^s\right) &= \exp\left(\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s} (q^n T)^s\right) \\
&= \exp(-\log(1-q^n T)) \\
&= \frac{1}{1-q^n T} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} q^{nj} T^j
\end{aligned}$$

(3) Önermelerin denkliği:

(i) Öyle $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{C}$ vardır ki, $s = 0, 1, 2, \ldots$ için,

$$N_s = \sum_j \beta_j^s - \sum_i \alpha_i^s$$

olur.

(ii) $Z(H_f/\mathbb{F}_q;T)$ bir rasyonel fonksiyondur: öyle $P(T), Q(T) \in \mathbb{C}[T]$ vardır ki, $Z(H_f/\mathbb{F}_q;T) = \frac{P(T)}{Q(T)}$ olur.

İspat

(ii) $\Rightarrow$ (i)

Zeta fonksiyonunun sabit terimi 1dir, ve katsayıların tamsayı olduğunu hatırlayalım.

$Z(H_f/\mathbb{F}_q;T) \in 1 + T\mathbb{Z}_{>0}[[T]]$.

Bu nedenle, $P(0) = Q(0) = 1$ olduğunu varsayabiliriz.

$Z(H_f/\mathbb{F}_q;T) = \frac{\prod_i (1-\alpha_i T)}{\prod_j (1-\beta_j T)}$ olarak yazılabilir. (Sıfırda bir değerini alan her rasyonel fonksiyon böyle yazılabilir.)

Şimdi her iki tarafın logaritmasının türevini (logaritmik türevini) alarak,

$$\frac{Z'}{Z} = \sum_i \frac{-\alpha_i}{1-\alpha_i T} - \sum_j \frac{\beta_j}{1-\beta_j T}$$

Not: $P(T) = \prod_i (1-\alpha_i T)$ için,

$$P'(T) = -\alpha_1 \prod_{i\neq 1}(1-\alpha_i T) + (1-\alpha_1 T)\left[\prod_{i\neq 1}(1-\alpha_i T)\right]'$$

olur, ve

$$\frac{P'}{P} = \frac{-\alpha_1}{1-\alpha_1 T} + \frac{(\prod_{i\neq 1}(1-\alpha_i T))'}{\prod_{i\neq 1}(1-\alpha_i T)}$$

tümevarımla, $\frac{P'}{P} = \sum_i \frac{-\alpha_i}{1-\alpha_i T}$

O halde, $\frac{Z'}{Z} = \sum_{s=0}^{\infty} N_{s+1} T^s = \sum_i \frac{-\alpha_i}{1-\alpha_i T} + \sum_j \frac{-\beta_j}{1-\beta_j T}$ olacaktır.

Şimdi geometrik seri açılımını sağ tarafa uygulayalım:

$= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_i -\alpha_i(\alpha_i T)^s + \sum_{s=0}^{\infty} \sum_j \beta_j(\beta_j T)^s$.

Şimdi her iki tarafı T ile çarparak:

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{\infty} N_{s+1} T^{s+1} &= -\sum_{s=0}^{\infty}\sum_i (\alpha_i T)^{s+1} + \sum_{s=0}^{\infty}\sum_j (\beta_j T)^{s+1} \\ &= \sum_{s=0}^{\infty}(-\sum_i (\alpha_i)^{s+1} + \sum_j (\beta_j)^{s+1})T^{s+1} \end{aligned}$$

elde ederiz.

Bu nedenle

$$N_s = \sum_{i,j} -\alpha_i^s + \beta_j^s$$

olur.

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Kabul edelim ki,

$$N_s = \sharp(H_f(\mathbb{F}_{q^s})) = \sum_j \beta_j^s - \sum_i \alpha_i^s$$

olsun, ve

$$\begin{aligned}
Z(H_f/\mathbb{F}_q;T) &= \exp(\sum_{s=1}^{\infty}\frac{N_s}{s}T^s) \\
&= \exp(\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\sum_j \beta_j^s - \sum_i \alpha_i^s}{s}T^s) \\
&= \prod_j \exp(\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\beta_j^s T^s}{s})/\prod_i \exp(\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\alpha_i^s T^s}{s}) \\
&= \prod_j \exp(-\log(1-\beta_j T))/\prod_i \exp(-\log(1-\alpha_i T)) \\
&= \frac{\prod_i (1-\alpha_i T)}{\prod_j (1-\beta_j T)} = \frac{P(T)}{Q(T)}
\end{aligned}$$

İhtarlar

1. Genel olarak $\mathbb{A}_F^n$ içindeki hiperyüzeyler yerine cebirsel varyeteleri düşünmek mümkün:

$$f_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_r(x_1,\ldots,x_n)\in F[x_1,\ldots,x_n]$$

ve

$$V(f_1,\ldots,f_r)=\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{A}_F^n|f_i(x_1,\ldots,x_n)=0\ 1\le i\le r\}=H_{f_1}\cap\ldots\cap H_{f_r}$$

kümesine $f_1,\ldots,f_r\in F[x_1,\ldots,x_n]$ polinomlarının $\mathbb{A}_F^n$ içinde tanımladığı cebirsel varyete denir.

Benzeri şekilde, $\tilde{f}_1,\ldots,\tilde{f}_r\in F[x_0,\ldots,x_n]$ homojen polinomları $\mathbb{P}_F^n$ içinde $\tilde{V}(\tilde{f}_1,\ldots,\tilde{f}_r)=\tilde{H}_{\tilde{f}_1}\cap\ldots\tilde{H}_{\tilde{f}_r}$ projektif çokluğunu tanımlar.

2. Eğer, $F=\mathbb{F}_q$ sonlu cismi olursa bu durumda

$$N_s=\sharp(V(f_1,\ldots,f_r)(\mathbb{F}_{q^s}))\text{ veya }\sharp(\tilde{V}(\tilde{f}_1,\ldots,\tilde{f}_r)(\mathbb{F}_{q^s}))$$

sayılarını tanımlamak mümkün. Bu durumda, $Z(V(f_1,\ldots,f_r)/\mathbb{F}_q;T)$ Hasse-Weil zeta fonksiyonu aynı formülle tanımlanır.

3.3 Weil Sanıları

1949 yılında André Weil, $Z(\tilde{V}(\tilde{f}_1,\ldots,\tilde{f}_r)/\mathbb{F}_q;T)$ fonksiyonları ile ilgili öngörülerde bulunmuştur. (Artin, Hasse, Weil; Artin, basit örneği.) Bu öngörülere "Weil Sanıları" denir.

X, $\mathbb{F}_q$ üzerinde tanımlı, $n-$ boyutlu pürüzsüz projektif çokluk olsun. $Z(X/\mathbb{F}_q;T)$ Hasse-Weil zeta fonksiyonu şu özellikleri sağlar:

1. $Z(X/\mathbb{F}_q;T)$ rasyonel fonksiyondur. (ispatlayan: Dwork)

2. $Z(X/\mathbb{F}_q;T)$ aşağıdaki fonksiyonel denklemi sağlar. (ispatlayan: Grothendieck.)

$$Z(X/\mathbb{F}_q;\frac{1}{q^nT}) = \pm q^{\chi\frac{n}{2}}T^{\chi}Z(X/\mathbb{F}_q;T)$$

χ: X çokluğunun Euler karakteristiği.

3. $Z(X/\mathbb{F}_q;T) = \frac{P_1...P_{2n-1}}{P_0...P_{2n}}$ (ispatlayan: Deligne.) öyle ki,

$$\begin{aligned} P_0(T) &= 1-T \\ P_h(T) &= \prod_{i=1}^{\beta_h}(1-\alpha_{h,i}T) \;\; 0<h<2n \\ P_{2n}(T) &= 1-q^{2n}T \end{aligned}$$

olup, bu polinomlar $\mathbb{Z}[T]$ halkasındadır, ve $\alpha_{h,i}$: cebirsel tamsayılardır.

$|\alpha_{h,i}| = q^{h/2}$ (Riemann hipotezi.)

β_h : X çokluğunun Betti sayıları, ve

$$\sum_{i=0}^{2n}\beta_i = \chi(X)$$

(Deligne)

Bölüm 4

Dwork'un ispat stratejisi:

4.1 Rasyonellik kriteri

Teorem 3. K cisim, $F[T] = \sum_{i=0}^{\infty} a_i T^i \in K[[T]]$ olsun. $m, s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ için $A_{s,m} \in K^{(m+1)\times(m+1)}$ matrisini

$i, j = 0, \ldots, m$ için, $(A_{s,m})_{i,j} = a_{s+i+j}$ olarak tanımlansın. Yani:

$$A_{s,m} = \begin{pmatrix} a_s & a_{s+1} & \ldots & a_{s+m-1} & a_{s+m} \\ a_{s+1} & a_{s+2} & \ldots & a_{s+m} & a_{s+m+1} \\ \vdots & & & & \\ a_{s+m} & a_{s+m+1} & \ldots & a_{s+2m-1} & a_{s+2m} \end{pmatrix}$$

ve $N_{s,m} = \det A_{s,m}$ olsun.

Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir:

(i) $F(T)$ bir rasyonel fonksiyondur.

(ii) Öyle $M, S \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ vardır ki, her $s \geq S$ için, $N_{s,M} = 0$ olur.

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii): $K[T]$de $P(T) = b_0 + b_1 T + \ldots + b_N T^N$ ve $0 \neq Q(T) = c_0 + c_1 T + \ldots + c_M T^M$ polinomları verilsin. $F(T) = P(T)/Q(T)$ olsun, ve böylece $FQ = P$ olur. $F(T) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i T^i$ olsun ve F, Q ve Pnin T^i katsayılarını hesaplayalım:

$$b_i = \sum_{x+y=i} a_x c_y$$

olur.

$i \overset{>}{\neq} M$ iken, ($i = M + s$ ve $s \in \mathbb{Z}_{>0}$ için:)

$$a_0c_{M+s} + a_1c_{M+s-1} + \ldots + a_{s-1}c_{M+1} + a_sc_M + a_{s+1}c_{M-1} + \ldots + a_{M+s}c_0 = b_{M+s}$$

denkleminde, $c_{M+s} = \ldots = c_{M+1} = 0$ olacaktır.

$i \overset{>}{\neq} M, N$ ve $i = M + s$ olsun (yani $s > \max\{M, N\} - M$.)

Bu durumda, (yukarıdaki denklemde s yerine sırası ile $s, s+1, \ldots, s+M$ yazarak, ve sıfır olan terimleri yazmayarak, ve $b_{M+s} = 0$ olmasını sağlayacak kadar büyük s seçerek)

$$\begin{aligned}
a_sc_M + a_{s+1}c_{M-1} + \ldots + a_{M+s}c_0 &= b_{M+s} = 0 \\
a_{s+1}c_M + a_{s+1}c_{M-1} + \ldots + a_{M+s+1}c_0 &= b_{M+s+1} = 0 \\
&\vdots \\
a_{s+M}c_M + a_{s+M+1}c_{M-1} + \ldots + a_{s+2M}c_0 &= b_{s+2M} = 0
\end{aligned}$$

$(M+1) \times (M+1)$ lik lineer denklem sistemini elde ederiz. Bu sistemin, $(c_M, c_{M-1}, \ldots, c_0) \neq (0, \ldots, 0)$ çözümü vardır. Bu nedenle, katsayı matrisi $A_{s,M}$nin determinantı sıfırdır.

$$\det(A_{s,M}) = N_{s,M} = 0$$

her $s \geq S$ için. (burada $S = \max\{M, N\} - M + 1$)

Şimdi (ii) $\Rightarrow$ (i) ispatını verelim. Kabul edelim ki, öyle $M, S \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ve her $s \geq S$ için $N_{s,M} = 0$ olsun. Şimdi bu şartı sağlayan en küçük $M \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ seçilsin.

$M = 0$ ise öyle $S \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ vardır ki, her $s \geq S$ için $N_{s,0} = \det A_{s,0} = a_s = 0$ olsun. O zaman,

$$F(T) = \sum_{i=0}^{\infty} a_iT^i = \sum_{i=0}^{S-1} a_iT^i$$

olur ve $F(T)$ bir polinom ve böylece rasyonel fonksiyon olur.

$M \geq 1$ ise, ilk olarak şunu ispatlayacağız:

Her $s \geq S$ için,

$$N_{s,M-1} \neq 0.$$

Kabul edelim ki, bir $s_0 \geq S$ olsun öyle ki, $N_{s_0,M-1} = 0$.

Ayrıca,

$$A_{s_0,M} = \left[\begin{array}{c|c} A_{s_0,M-1} & \begin{matrix} a_{s_0+M} \\ \vdots \end{matrix} \\ \hline a_{s_0+M} \quad \dots & a_{s_0+2M} \end{array}\right]$$

Burada $\vec{r}_i$ $i+1$. satırı göstersin ($i = 0, \dots, M$)

$N_{s_0,M-1} = \det(A_{s_0,M-1}) = 0$. (kabul gereği.)

Hatırlatma

$X \in K^{n\times n}$ için, $\det(X) = 0$ ancak ve ancak $\{\text{Satır}_1(X), \dots, \text{Satır}_n(X)\}$ K üzerinde lineer bağımlı ve $\det(X) \neq 0$ ancak ve ancak $\{\text{Satır}_1(X), \dots, \text{Satır}_n(X)\}$ K üzerinde lineer bağımsız.

Bu durumda, $\alpha_0, \dots, \alpha_{M-1} \in K$ mevcuttur (hepsi sıfır olmayan) öyle ki,

$$\alpha_0 \vec{r}_0 + \dots + \alpha_{M-1}\vec{r}_{M-1} = (0, \dots, 0, \delta)$$

δ sıfır olamayabilir. ($A_{s_0,M}$ matrisinin ilk $M-1$ satırının son terimlerini ihtiva etmediğimizde oluşan $A_{s_0,M-1}$ matrisinin determinantının sıfır olmasını kullanmaktayız.)

Burada $\vec{r}_k$ ile ilk $\alpha_k \neq 0$ şartını sağlayan en küçük $k \in \{0, 1, \dots, M-1\}$ seçelim:

$$\alpha_k \vec{r}_k + \dots + \alpha_{M-1}\vec{r}_{M-1} = (0, \dots, 0, \delta)$$

İki durum söz konusu:

$k \overset{>}{\neq} 0$

$$A_{s_0,M} = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{s_0} & \dots & a_{s_0+M-1} & a_{s_0+M} \\ \hline & & & a_{s_0+M+1} \\ & A_{s_0+1,M} & & \vdots \\ & & & a_{s_0+2M} \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} a_{s_0} & a_{s_0+1} & \dots & a_{s_0+M-1} & a_{s_0+M} \\ a_{s_0+1} & a_{s_0+2} & \dots & a_{s_0+M} & a_{s_0+M+1} \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \delta' \\ \vdots & & & & \\ a_{s_0+M} & a_{s_0+M+1} & \dots & a_{s_0+2M-1} & a_{s_0+2M} \end{bmatrix}$$

(Burada $\sim$ satır denkliğidir, ve $(0, 0, \dots, 0, \delta')$ $k+1$. satırda yer almaktadır, ve $\delta' = \frac{\delta}{\alpha_k}$).)

Bu durumda, $\det(A_{s_0+1,M-1}) = N_{s_0+1,M-1} = 0$ olur, çünkü sıfırlardan oluşan bir satır içeren bir matrise satır olarak denktir.

$k = 0$ ise,

$$\alpha_0 \vec{r}_0 + \dots + \alpha_{m-1}\vec{r}_{m-1} = (0, \dots, 0, \delta)$$

$$A_{s_0,M} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \delta' \\ a_{s_0+1} & a_{s_0+2} & \dots & a_{s_0+M} & a_{s_0+M+1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{s_0+M} & a_{s_0+M+1} & \dots & a_{s_0+2M-1} & a_{s_0+2M} \end{bmatrix}$$

İki durum incelenecektir:

$\delta = 0$ olduğunda,

$$A_{s_0,M} = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} a_{s_0} \\ \vdots \\ a_{s_0+M-1} \end{matrix} & A_{s_0+1,M-1} \\ \hline a_{s_0+M} & \dots \; a_{s_0+2M} \end{array}\right] \sim A'$$

A' matrisinin ilk satırı sıfırdır. $A_{s_0+1,M-1}$ matrisi, $A_{s_0,M}$ içerisinde sağ üst kısım olarak bulunur, ve ilk satırı sıfır olan bir matrise (satır) denktir.

Böylece, $\det A_{s_0+1,M-1} = N_{s_0+1,M-1} = 0$ olur.

$\delta \neq 0$ olduğunda, determinant ilk satır boyunca açılarak

$\det(A_{s_0,M}) = \pm\delta \det(A_{s_0+1,M-1}) = 0$ olur.

($A_{s_0+1,M-1}$ matrisi, $A_{s_0,M}$ içerisinde sol alt kısım olarak da bulunur.)

O nedenle, her iki durumda da $\det(A_{s_0+1,M-1}) = 0$ olur.

Sonuç olarak, öyle bir $s_0 \geq S$ vardır ki, $N_{s_0,M-1} = 0 \Rightarrow N_{s_0+1,M-1} = 0$.

Her $s \geq s_0$ için, $N_{s,M-1} = 0$ olması M'nin seçimi (her $s \geq s_0$ için $N_{s,M} = 0$ koşulunu sağlayan en küçük sayı olması) ile çelişir.

O halde, her $s \geq S$ için, $N_{s,M-1} \neq 0$. Ancak $N_{s,M} = 0$

Bu durumda, öyle $u_0, \dots, u_M \in K - \{0\}$ vardır ki,

$$u_0\vec{r}_0 + \dots + u_M\vec{r}_M = \vec{0}$$

olsun.

Her $s \geq S$ için $A_{s,M}$ matrisinin $M+1$. satırını $\vec{r}_0, \dots, \vec{r}_{M-1}$ vektörlerinin $K-$lineer kombinasyonu olarak yazabiliriz.

Buraya dikkat!

Bu takdirde,

$$\begin{pmatrix} \vec{r}_0 \\ \dots \\ \vec{r}_{M-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_M \\ \vdots \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

lineer sistemi ($A_{s,M}$ matrisinin ilk M satırının belirttiği sistem) $M \times M+1$ lik bir lineer sistemdir. Bu nedenle sıfırdan farklı bir çözümü vardır.

O zaman, her $s \geq S$ için,

$$\begin{aligned} a_s v_M + \ldots + a_{s+M} v_0 &= 0 \\ &\vdots \\ a_{s+M-1} v_M + \ldots + a_{s+2M-1} v_0 &= 0 \end{aligned}$$

olduğunda,

$$a_{s+M} v_M + \ldots + a_{s+2M} v_0 = 0$$

olur. (Çünkü $A_{s,M}$nin son satırı, diğer satırların doğrusal bileşkesi.)

Böylece,

$(\sum_{i=0}^{M} v_i x^i)(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i) \in k[x]$ ve bu polinomun derecesi $< S + M$ olur.

Örnek: $f(x) = 1 + x + x^2 + \ldots$ olsun. Bu kuvvet serisinin katsayılarıyla oluşturulan $A_{s,M}$ matrislerinden determinantı sıfır olan en küçük M, 1dir. Matris ise $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ olur. Belirttiği doğrusal sistem $v_0 + v_1 = 0$ denklemidir. Böylece

$(1 + (-1)t)(1 + t + t^2 + \ldots) = 1.$

elde edilir, ve $f(x) = \frac{1}{1-x}$ rasyonel fonksiyonu bulunur.

Bölüm 5

$Z(H_f/\mathbb{F}_q;T)$ $p-$sel meromorfiktir.

Tanım 18. $P(T) \in \Omega_p[[T]]$ biçimsel kuvvet serisinin yakınsama yarıçapı $r(P(T)) = \infty$ ise $P(T)$ye $p-$sel tam fonksiyon denir. Meromorfik fonksiyon iki tam fonksiyonun oranı olan fonksiyondur.

Soru: $\mathbb{Q}_p$de tam fonksiyonun sıfırları izole midir?

Teorem $Z(H_f/\mathbb{F}_q;T) \in \mathbb{Z}[[T]] \subset \Omega_p[[T]]$ iki $p-$sel tam fonksiyonun bölümü olarak ifade edilir, yani $Z(H_f/\mathbb{F}_q;T)$ $p-$sel meromorfiktir.

ispat ileride.

Bölüm 6

Dwork'un ispatı

Bu bölümde, zeta fonksiyonunun meromorfik olduğunu kabul ettiğimizde, rasyonel olması gerektiğini ispatlayacağız.

f polinomunun $\mathbb{F}_q$ üzerinde tanımladığı (hiperyüzeyin) zeta fonksiyonu $Z(H_f/\mathbb{F}_q;T)$yi $Z(T)$ olarak kısaltalım. $Z(T) \in 1+T\mathbb{Z}[[T]]$dir, ve $Z(T)$ $p-$sel meromorfik fonksiyondur, yani $A(T), B(T) \in 1+T\Omega_p[[T]]$ $p-$sel tam fonksiyonları vardır öyle ki,

$$Z(T) = \frac{A(T)}{B(T)}$$

olsun.

<u>Hatırlatma:</u>

$p-$sel Weierstrass hazırlık teoremi.

$B(T) \in \Omega_p[[T]]$ $p-$sel tam fonksiyon ise, $p-$sel Weierstrass hazırlık teoremini $B(T)$ için uyarladığımızda, $R = q^{2n}$ için, $P(T) \in 1+T\Omega_p[T]$ ve $H(T) \in 1+T\Omega_p[[T]]$ olacak şekilde, $D(q^{2n})$ kapalı diskinde $H(T)$ yakınsaktır ve sıfırdan farklıdır öyle ki, $B(T) = P(T)H(T)$ olsun.

$H(T)^{-1} = G(T) \in 1+T\Omega_p[[T]]$ ve $G(T)$de $D(q^{2n})$ kapalı diskinde yakınsar ve $G(T) \neq 0$.

$p-$sel Weierstrass hazırlık teoremini kullanarak,

$$B(T) = P(T)H(T) = \frac{P(T)}{G(T)}$$

olarak yazılır.

$F(T) = G(T)A(T) = G(T)B(T)\frac{A(T)}{B(T)}$ olarak tanımlansın. Bu durumda,

$$F(T) = P(T)Z(T)$$

ve $F(T) \in 1 + T\Omega_p[[T]]$ ve $P(T) \in 1 + T\Omega_p[T]$ olur.

Şimdi de, $F(T), P(T), Z(T)$nin seri açılımlarını yazalım:

$$\begin{aligned} F(T) &= \sum_{i=0}^{\infty} b_i T^i \in 1 + T\Omega_p[[T]] \\ P(T) &= \sum_{i=0}^{e} c_i T^i \in 1 + T\Omega_p[T] \\ Z(T) &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i T^i \in 1 + T\mathbb{Z}[[T]] \end{aligned}$$

ve $M = 2e + 1$ olarak sabitleyelim. ($e = \text{derece}(P(T))$.)

Bu durumda,

$$A_{s,M} = \begin{bmatrix} a_s & a_{s+1} & \dots & a_{s+M} \\ \vdots & & & \\ a_{s+M} & a_{s+M+1} & \dots & a_{s+2M} \end{bmatrix} \text{ ve } D_{s,M} = \det(A_{s,M}) \text{ olsun.}$$

<u>İddaa</u> $S \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ vardır, öyle ki her $s \geq S$ için $D_{s,M} = 0$ olsun. Bu gösterildiği zaman, $Z(T) \in 1 + T\mathbb{Z}[[T]]$ için $Z(T) = \frac{p(T)}{q(T)}$ olacak şekilde $p(T), q(T) \in \mathbb{Q}[T]$ vardır. (rasyonalite koşulu sonucu.)

<u>İddaanın ispatı</u>

$F(T) = P(T)Z(T)$ eşitliğini kullanarak,

$$b_{j+e} = c_0 a_{j+e} + c_1 a_{j+e-1} + \ldots + c_e a_j$$

denklemi elde edilir ve burada $c_0 = 1$dir. ($P(T) \in 1 + T\Omega_p[T]$.)

Temel sütun işlemleri $A_{s,M}$ matrisine uygulanarak:

$$A_{s,M} \sim \left[\begin{array}{cccc|ccc} a_s & a_{s+1} & \dots & a_{s+e-1} & b_{s+e} & \dots & b_{s+M} \\ a_{s+1} & a_{s+2} & \dots & a_{s+e} & & & \\ \vdots & & & & & & \\ a_{s+M} & a_{s+M+1} & \dots & a_{s+M+e-1} & b_{s+e+M} & \dots & b_{s+2M} \end{array}\right]$$

Burada, $A_{s,M}$ matrisinin sütunları, c_* katsayıları ile çarpılarak uygulanan satır işlemleri ile yukarıdaki matrise ulaşılır:

$$\sum_{t=1}^{e} c_t \text{Sütun}_{M+1-\nu-t}(A_{s,M}) + \text{Sütun}_{M+1-\nu}(A_{s,M}) \to \text{Sütun}_{M+1-\nu}(A_{s,M})$$

satır denkliği $\nu = 0, 1, \ldots, M - e$ için uygulanarak elde edilir.

Son adımda:

$$\sum_{t=1}^{e} c_t \text{Sütun}_{e-t+1}(A_{s,M}) + \text{Sütun}_{e+1}(A_{s,M}) \to \text{Sütun}_{e+1}(A_{s,M})$$

satır denkliği uygulanarak elde edilir.

Böylece, $\det(A_{s,M}) = \det(B_{s,M})$ olur. Türetilmiş $B_{s,M} \in \mathbb{Z}^{(m+1)\times(m+1)}$ matrisi yardımıyla $D_{s,M}$ hesaplanacaktır.

$$Z(T) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i T^i \in 1 + T\mathbb{Z}[[T]]$$

kuvvet serisinde, $i = 0, 1, 2, \ldots,$ ve n : uzayın (zeta fonksiyonundaki hiperyüzeyin yeraldığı afin uzay) boyutu olmak üzere,

$$|a_i|_\infty \leq q^{ni}$$

olur.

$A_{s,M}$ matrisinin (i, j) terimi $a_{s+i+j-2}$ olacağından, ve $|a_{s+i+j-2}|_\infty \leq q^{n(s+i+j-2)} \leq q^{n(s+2M)}$ olur.

Hatırlatma: $X = (X_{i,j}) \in K^{(M+1)\times(M+1)}$ (K : cisim) ve

$$\det(X) = \sum_{\sigma \in \text{Sym}(M+1)} \text{sgn}\sigma X_{1,\sigma(1)} \ldots X_{M+1,\sigma(M+1)}$$

ve $\text{Sym}(M+1) = \{\sigma : I_{M+1} \to I_{M+1} | \sigma : 1-1 \text{ örten fonksiyonlar}\}$ bileşke altında gruptur.

$\text{sgn} : \text{Sym}(M+1) \to \{\pm 1\}$ işaret homomorfizması.

$|\det(A_{s,M})|_\infty \leq (M+1)! q^{n(s+2M)(M+1)} = (M+1)! q^{2nM(M+1)} q^{ns(M+1)}$

Şimdi $|D_{s,M}|_p$ değerini hesaplayalım:

$\alpha \in \Omega_p$ seçelim, öyle ki $|\alpha|_{\Omega_p} = q^{2n}$ olsun. Bu eşitliği sağlayacak $\alpha \in \Omega_p$ mevcuttur.

$\alpha \in D(q^{2n})$, ve $F(\alpha) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i \alpha^i$ yakınsaktır ancak ve ancak $|b_i \alpha^i|_{\Omega_p} \to 0$ ise.

O halde, $i \gg 0$ için, $|b_i|_{\Omega_p} q^{2ni} < 1$ yani $|b_i|_{\Omega_p} < q^{-2ni}$ $(i \gg 0)$

Böylece

$$|\det(A_{s,M})|_p = |\det(B_{s,M})|_p = |\sum_{\sigma \in \text{Sym}(M+1)} \text{sgn}(\sigma)(B_{s,M})_{0,\sigma(0)} \ldots (B_{s,M})_{M,\sigma(M)}|_p$$

Bu toplamın genel teriminde, e tane a_i ve $M+1-e$ tane b_i bulunur. $a_i \in \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}_p$ olduğu için $|a_i|_{\Omega_p} \leq 1$dir, böylece

$|\det(A_{s,M})|_p \leq (\max_{i \geq s+e} |b_i|_{\Omega_p})^{M+1-e} < q^{-2ns(M+1-e)}$

ve $i \gg 0$ için (burada her $i \geq s$ için)

$M = 2e + 1 > 2e$ olmak üzere,

$|\det(A_{s,M})|_p < q^{-2ns(M+1-e)} = q^{-ns(M+3)} < q^{-ns(M+2)}$.

$D_{s,M} = \det(A_{s,M})$ olsun.

$|D_{s,M}|_\infty |D_{s,M}|_p < q^{-ns(M+2)}(M+1)! q^{2nM(M+1)} q^{ns(M+1)}$

ve $(M+1)! q^{2nM(M+1)} q^{-ns} < 1$ her $s \gg 0$ için.

Her $s \gg 0$ için, $|D_{s,M}|_\infty |D_{s,M}|_p < 1$

$A_{s,M} \in \mathbb{Z}^{(M+1)\times(M+1)}$ ve $D_{s,M} \in \mathbb{Z}$

Kabul edelim ki, $D_{s,M} \neq 0$ O zaman bir tek $r \in \mathbb{Z}$ vardır, öyle ki, $r \neq 0$ $p \not| r$ ve $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

Öyle ki, $D_{s,M} = p^l r$ ve $|r|_\infty \neq 0$.

$0 \overset{<}{\neq} |r|_\infty = |p^{-l} p^l r|_\infty = p^{-l} |p^l r|_\infty = p^{-l} |D_{s,M}|_\infty = |D_{s,M}|_p |D_{s,M}|_\infty < 1$

Bu bir çelişki verir, ve $D_{s,M} = 0$ olur $s \gg 0$ için.

Rasyonalite kriteri sonucu: $p(T), q(T) \in \mathbb{Q}[T]$ vardır öyle ki

$$Z(T) = \frac{p(T)}{q(T)}$$

Bölüm 7

$Z(H_f/\mathbb{F}_q;T)$ zeta fonksiyonunun $p-$sel meromorfik olmasının ispatı (Dwork):

Bu bölümde Dwork'un ispatında kullanmış olduğumuz şu teoremi ispat edeceğiz:

Teorem $f(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{F}_q[x_1,\ldots,x_n]$ ile tanımlı H_f hiperyüzeyinin $Z(H_f/\mathbb{F}_q;T)$ zeta fonksiyonu $1+T\Omega[[T]]$ içinden seçilebilecek iki tane $p-$sel tam fonksiyonun oranıdır, ve sonuç olarak $p-$sel meromorfiktir.

1. adım(İlk indirgeme) Burada $Z(H_f/\mathbb{F}_q;T)$ zeta fonksiyonundan $Z'(H_f/\mathbb{F};T)$ ile gösterilen yeni bir fonksiyon türeteceğiz ve bu fonksiyonu inceleyeceğiz.

$$\begin{aligned}
N'_s &\overset{\text{tanım}}{=} \sharp\{(x_1,\ldots,x_n) \in (\mathbb{F}_{q^s}^{\times})^n | f(x_1,\ldots,x_n) = 0\} \\
&= \sharp\{(x_1,\ldots,x_n) \in H_f(\mathbb{F}_{q^s}) | x_i \neq 0\, \forall i = 1,2,\ldots,n\} \\
&= \sharp\{(x_1,\ldots,x_n) \in H_f(\bar{\mathbb{F}}_q) | x_i^{q^s-1} = 1\, \forall i = 1,2,\ldots,n\}
\end{aligned}$$

$Z'(H_f/\mathbb{F}_q;T) = \exp(\sum_{s=1}^{\infty} \frac{N'_s}{s} T^s)$ olarak tanımlansın.

Sav $Z(H_f/\mathbb{F}_q;T)$ fonksiyonunun $p-$sel meromorf olmasını göstermek için Z' fonksiyonunün $p-$sel meromorf olduğunu göstermek yeterlidir.

Dikkat: Z' fonksiyonu Znin türevi değil.

İspat

$$
\begin{aligned}
Z(H_f/\mathbb{F}_q;T) &= \exp(\sum_{s=1}^{\infty}\frac{N'_s}{s}T^s+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{N_s-N'_s}{s}T^s) \\
&= \exp(\sum_{s=1}^{\infty}\frac{N'_s}{s}T^s)\exp(\sum_{s=1}^{\infty}\frac{N_s-N'_s}{s}T^s) \\
&= Z'(H_f/\mathbb{F}_q;T)\exp(\sum_{s=1}^{\infty}\frac{N_s-N'_s}{s}T^s)
\end{aligned}
$$

Temel kombinatorik formülü: $A_1,\ldots,A_n$ sonlu kümeleri için, $|X| = \sharp X$ ile X kümesinin eleman sayısı ifade edilmek üzere,

$$
|\cup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n}|A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k}|
$$

olur.

$$
H_f^{(i_0)} = \{(x_1,\ldots,x_n)\in H_f | x_{i_0}=0\}
$$

olarak tanımlayalım.

(Not: $H_f^{(i_0)}$ kümesini $\mathbb{A}_{\mathbb{F}_q}^{n-1}$ içinde bir afin hiperyüzey olarak düşünebiliriz.)

$$
N'_s = \sharp(H_f(\mathbb{F}_{q^s}) - \cup_{i=1}^{n} H_f^{(i)}(\mathbb{F}_{q^s}))
$$

$$
H_f^{(i_0,\ldots,i_k)} = \{(x_1,\ldots,x_n)\in H_f | x_{i_0}=\ldots=x_{i_k}=0\}
$$

olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
N_s - N'_s &= |\cup_{i=1}^{n} H_f^{(i)}(\mathbb{F}_{q^s})| \\
&= \sum_{i=1}^{n}|H_f^{(i)}(\mathbb{F}_{q^s})| - \sum_{1\le i<j\le n}|H_f^{(i,j)}(\mathbb{F}_{q^s})| + \ldots \\
&\quad +(-1)^k\sum_{1\le i_0<\ldots<i_k\le n}|H_f^{(i_0,\ldots,i_k)}(\mathbb{F}_{q^s})| + \ldots + (-1)^{n-1}|H_f^{(1,\ldots,n)}(\mathbb{F}_{q^s})|
\end{aligned}
$$

Burada $|H_f^{(i,j)}(\mathbb{F}_{q^s})| = |H_f^{(i)}(\mathbb{F}_{q^s})\cap H_f^{(j)}(\mathbb{F}_{q^s})|$ vs olacaktır.

Böylece,

$$\exp(\sum_{s=1}^{\infty}\frac{N_s - N'_s}{s}T^s) = \frac{\prod_{i=1}^{n} Z(H_f^{(i)}/\mathbb{F}_q;T)\dots}{\prod_{1\le i<j\le n} Z(H_f^{(i,j)}/\mathbb{F}_q;T)\dots}$$

olacaktır. (Payda tek sayıda koordinatın sıfır olduğu zeta fonksiyonlarının, paydada ise çift sayıda koordinatın sıfır olduğu zeta fonksiyonlarının çarpımı yer almaktadır.)

Tümevarım kabulümüz sonucu ve $H_f^{(i)}, H_f^{(i,j)}, \dots$ hiperyüzeylerinin $\mathbb{A}_{\mathbb{F}_q}^{n-1}, \mathbb{A}_{\mathbb{F}_q}^{n-2} \dots$ afin uzayları içinde olması sonucu $\frac{\prod_{i=1}^{n} Z(H_f^{(i)}/\mathbb{F}_q;T)\dots}{\prod_{1\le i<j\le n} Z(H_f^{(i)}\cap H_f^{(j)}/\mathbb{F}_q;T)\dots}$, $p-$sel meromorftur.

Sonuç olarak $Z'(H_f/\mathbb{F}_q;T)$ fonksiyonu $p-$sel meromorftur ancak ve ancak $Z(H_f/\mathbb{F}_q;T)$ fonksiyonu da $p-$sel meromorf ise.

$\gamma(X,Y)$ (2. kısım) Buradaki γ fonksiyonu öncekinin ispat için gerekli özelliklere uygun genellemesi.

$$\gamma(X,Y) = (1+Y)^X(1+Y^p)^{\frac{X^p-X}{p}}\dots(1+Y^{p^n})^{\frac{X^{p^n}-X^{p^{n-1}}}{p^n}}\dots$$

olarak, ve

$$(1+Y)^X = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{X(X-1)\dots(X-i+1)}{i!}Y^i \in \mathbb{Q}[[X,Y]]$$

olarak tanımlansın.

$\gamma(X,Y) = \sum_{m,n} a_{m,n}X^nY^m \in \mathbb{Z}[[X,Y]]$ olacaktır:

Gözlem:

$F(X) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_iX^i \in 1 + X\mathbb{Q}_p[[X]]$ için,

$$a_i \in \mathbb{Z}_p \; i = 1,2,\dots \Leftrightarrow \frac{F(X^p)}{(F(X))^p} \in 1 + pX\mathbb{Z}_p[[X]]$$

Gözlemin ispatı:

$$F(X) \in 1 + X\mathbb{Z}_p[[X]] \Rightarrow F(X)^p - F(X^p) \in X\mathbb{Z}_p[[X]]$$

$F(X)^p - F(X^p)$ katsayıları p ile bölünür ve böylece,

$F(X)^p - F(X^p) = H(X) = pG(X)$ olur ($G(X) \in X\mathbb{Z}_p[[X]]$ olmak üzere.)

Böylece, $\frac{F(X)^p}{F(X^p)} = 1 - p\frac{G(X)}{(F(X))^p} \in 1 + pX\mathbb{Z}_p[[X]]$

olur. Sonrasında da, kuvvet serileri katsayıları mukayese edilerek $a_i \in \mathbb{Z}_p$ olduğu ispatlanır.

Bu gözlem uyarlanarak,

$$\frac{\gamma(X^p,Y^p)}{\gamma(X,Y)^p} \in 1 + pX\mathbb{Z}_p[[X,Y]] + pY\mathbb{Z}_p[[X,Y]] \Leftrightarrow a_{m,n} \in \mathbb{Z}_p$$

ancak ve ancak

$\gamma(X,Y) = \sum a_{m,n} X^n Y^m \in \mathbb{Z}_p[[X,Y]]$.

Şimdi, $1 \neq \epsilon \in \Omega_p$ öyle ki $\epsilon^p = 1$ ve $\lambda = \epsilon - 1 \in \Omega_p$ olsun.

$$\Theta(T) = \gamma(T,\lambda) = \sum_{n=0} a_n T^n$$

ve $a_n = \sum_{m=n}^{\infty} a_{m,n} \lambda^m$ olarak tanımlayalım.

Gözlem: $\mathrm{mertebe}_p(\lambda) = \frac{1}{p-1}$

İspat: $1 \neq \epsilon \in \Omega_p$ ve $X^P - 1 = 0$ denkleminin bir köküdür. Dahası, $\epsilon \in \Omega_p$ sayısı,

$$\frac{x^p - 1}{x - 1} = x^{p-1} + \ldots + x + 1 = 0$$

denkleminin bir köküdür ve böylece $\lambda = \epsilon - 1 \in \Omega_p$ sayısı,

$$f(x) = \frac{(x+1)^p - 1}{(x+1) - 1} = x^{p-1} + \begin{pmatrix} p \\ p-1 \end{pmatrix} x^{p-2} + \ldots + \begin{pmatrix} p \\ 2 \end{pmatrix} x + p$$

polinomunun köküdür.

<u>1. Durum</u> $\mathrm{mer}_p(\lambda) < \frac{1}{p-1}$ olsaydı,

$$|\lambda|_p = (\frac{1}{p})^{\mathrm{mer}_p(\lambda)} > (\frac{1}{p})^{\frac{1}{p-1}} = |p|_p^{\frac{1}{p-1}} > |p|_p.$$

ve

$$|\lambda|_p^{p-1} > |p|_p \geq |p|_p |\lambda|_p^i$$

($i = 0, 1, \ldots, p-2$ için.)

$$0 = |f(\lambda)|_p = |\lambda^{p-1} + \begin{pmatrix} p \\ p-1 \end{pmatrix} \lambda^{p-2} + \ldots + \begin{pmatrix} p \\ 2 \end{pmatrix} \lambda + \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix} |_p = |\lambda|_p^{p-1} \neq 0$$

Burada ultrametrik özelliğini kullanmaktayız.

Böylece bu durum olamaz.

<u>2. Durum</u> $\mathrm{mer}_p(\lambda) > \frac{1}{p-1}$

$|\lambda|_p^{p-1} < |p|_p$ O nedenle, $|\lambda|_p^i |p|_p < |p|_p$ her $0 \leq i \leq p-2$ için. O zaman $0 = |f(\lambda)|_p = |p|_p \neq 0$. Bu durum da olamaz.

O halde, $\mathrm{mer}_p(\lambda) = \frac{1}{p-1}$.

Şimdi,

$$\Theta(T)=\gamma(T,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nT^n$$

ve $a_n=\sum_{m=n}^{\infty}a_{m,n}\lambda^n\geq \mathrm{mer}_p(\lambda^n)=\frac{n}{p-1}$

Sonuç olarak da, $\Theta(T)$ kuvvet serisi $D(p^{-\frac{1}{p-1}}{}^{-})$ açık diskinde yakınsaktır.

<u>Teorem</u> $a\in\mathbb{F}_q$ $(q=p^s)$ $t\in\Omega_p$ ile $a$ya karşılık gelen Teichmüller basamağını gösterelim. Bu durumda,

$$\Theta(t)\Theta(t^p)\ldots\Theta(t^{p^{s-1}})=\epsilon^{\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(a)}$$

$\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p$ için genişleme derecesi $[\mathbb{F}_q:\mathbb{F}_p]=s$ dir.

Burada $\mathbf{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}:\mathbb{F}_q\to\mathbb{F}_p$ ile $\mathbf{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(b)=b+b^p+\ldots+b^{p^{s-1}}$ olarak tanımlı $\mathbb{F}_q$dan $\mathbb{F}_p$ ye iz gönderimini gösteriyoruz.

E

$|$ olduğunda $\mathbf{Tr}_{E/F}:E\to F$ dönüşümü, $\mathbf{Tr}_{E/F}(b)=\sum_{\sigma\in\mathrm{Gal}(E/F)}\sigma(b)$ olarak tanımlanır.

F

İspat:

Şu eşitliği göstermemiz lazım:

$$\gamma(t,Y)\gamma(t^p,Y)\ldots\gamma(t^{p^{s-1}},Y)=(1+Y)^{t+t^p+\ldots+t^{p^{s-1}}}(1+Y^p)^{\frac{t^{p^s}-t}{p}}(1+Y^{p^2})^{\frac{t^{p^{s+1}}-t^p}{p^2}}\ldots$$

$t\in\Omega_p$, ve $a\in\mathbb{F}_q$ya karşılık gelen Teichmüller basamağı olduğu için $t^{p^s}=t$.

$\gamma(t,Y)\ldots\gamma(t^{p^{s-1}},Y)=(1+Y)^{1+t^p+\ldots+t^{p^{s-1}}}$

Öte yandan $\Theta(t)=\gamma(t,\lambda)$ ve

$$\begin{aligned}\Theta(t)\Theta(t^p)\ldots\Theta(t^{p^{s-1}}) &= (1+\lambda)^{t+t^p+\ldots+t^{p^s-1}}\\ &= \epsilon^{\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(a)}\end{aligned}$$

$$\sum_{x_0\in\mathbb{F}_{q^s}}\epsilon^{\mathbf{Tr}_{\mathbb{F}_{q^s}/\mathbb{F}_p}(x_0u)}=\begin{cases}0 & u\neq 0\\ q^s & u=0\end{cases}$$

$1\neq\epsilon$ Ω_p içinde p. dereceden birim kök.

İspat: $(u=0)$

$$\sum_{x_0\in\mathbb{F}_{q^s}}\epsilon^{\mathbf{Tr}_{\mathbb{F}_{q^s}/\mathbb{F}_p}(x_0u)}=\sum_{x_0\in\mathbb{F}_{q^s}}\epsilon^0=q^s$$

$(u \neq 0)$

$$S = \sum_{\mathbb{F}_{q^s}} \epsilon^{\mathbf{Tr}_{\mathbb{F}_{q^s}/\mathbb{F}_p}(x_0 u)}$$

olsun.

$0 \neq y \in \mathbb{F}_{q^s}$ sabitleyelim. Bu durumda:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{x_0 \in \mathbb{F}_{q^s}} \epsilon^{\mathbf{Tr}_{\mathbb{F}_{q^s}/\mathbb{F}_p}((x_0+y)u)} \\ &= \epsilon^{\mathbf{Tr}(yu)} \sum_{x_0 \in \mathbb{F}_{q^s}} \epsilon^{\mathbf{Tr}(x_0 u)} \\ &= \epsilon^{\mathbf{Tr}(yu)} S \end{aligned}$$

Sonuç olarak $S = 0$ (çünkü $\epsilon^{\mathbf{Tr}(yu)} \neq 1$.)

Her $u \in \mathbb{F}_{q^s}$ için

$$\sum_{x_0 \in \mathbb{F}_{q^s}} \epsilon^{\mathbf{Tr}_{\mathbb{F}_{q^s}/\mathbb{F}_p}(x_0 u)} = \begin{cases} 0 & u \neq 0 \\ q^s & u = 0 \end{cases}$$

Sonuç:

$$\sum_{x_0 \in \mathbb{F}^*_{p^s}} \epsilon^{\mathbf{Tr}_{\mathbb{F}_{q^s}/\mathbb{F}_p}(x_0 u)} = \begin{cases} -1 & u \neq 0 \\ q^{s-1} & u = 0 \end{cases}$$

her $u \in \mathbb{F}_{q^s}$ için.

Şimdi, $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}_q[x_1, \ldots, x_n]$ alalım.

$x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{F}^*_{q^s}$ için $f(x_1, \ldots, x_n) = u \in \mathbb{F}_{q^s}$

Ve

$$\begin{aligned} \sum_{x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{F}_q} \epsilon^{\mathrm{Tr}(x_0 f(x_1, \ldots, x_n))} &= (q^s - 1)N'_s - [(q^s - 1)^n - N'_s] \\ &= q^s N'_s - (q^s - 1)^n \end{aligned}$$

Hatırlatma:

$N'_s = \sharp\{(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{F}^*_{q^s})^n | f(x_1, \ldots, x_n) = 0\} = q^s N'_s - (q^s - 1)^n$

$$
\begin{aligned}
q^s N_s' &= (q^s-1)^n + \sum_{x_0;x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{F}_{q^s}^*} \epsilon^{\mathrm{tr}(x_0 f(x_1,\ldots,x_n))} \\
&= (q^s-1)^n + \sum_{x_0;x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{F}_{q^s}^*} \prod_{i=1}^{n} \epsilon^{\mathrm{tr}(b_i \underline{x}^{\omega_i})}
\end{aligned}
$$

Burada $x_0 f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^{N} b_i \underline{x}^{\omega_i}$ olarak yazılmıç olsun.

Bölüm 8

Dwork'un teoreminin sonuçları

K : cisim. $f_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_m(x_1,\ldots,x_n)$

E/K genişlemesi için

$$H_{f_1,\ldots,f_m}(E)=\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{A}^n_E|f_i(x_1,\ldots,x_n)=0\ i=1,\ldots,m\}$$

Sonuç 1: $f_1,\ldots,f_m\in K[x_1,\ldots,x_n]$, $K=\mathbb{F}_q$ afin çokluğunu tanımlayacağız:

$$N_s=\sharp(H_{f_1,\ldots,f_m}((F)_{q^s}))$$

ve $Z(T)=Z(H_{f_1,\ldots,f_m/\mathbb{F}_q};T)=\exp(\sum_{s=1}^{\infty}\frac{N_s}{s}T^s)$ olarak tanımlansın.

Bu durumda $Z(T)\in\mathbb{Q}[T]$, ve $Z(T)=\frac{A(T)}{B(T)}$

$A(T),B(T)\in\mathbb{Q}[T]$ ve $B(T)\neq 0$ vardır.

İspat: $m=1$ durumunu ispat etmiş olduğumuz Dwork teoremidir.

$m=2$: $N_s=\sharp(H_{f_1,f_2}(\mathbb{F}_{q^s}))=\sharp(H_{f_1}(\mathbb{F}_{q^s})\cap H_{f_2}(\mathbb{F}_{q^s})$

$H_{f_1f_2}(\mathbb{F}_{q^s})=H_{f_1}(\mathbb{F}_{q^s})\cup H_{f_2}(\mathbb{F}_{q^s})$

$\sharp H_{f_1f_2}(\mathbb{F}_{q^s})=\sharp H_{f_1}(\mathbb{F}_{q^s})+\sharp H_{f_2}(\mathbb{F}_{q^s})-N_s$

$N_s=\sharp H_{f_1,f_2}(\mathbb{F}_{q^s})=\sharp H_{f_1}(\mathbb{F}_{q^s})+\sharp H_{f_2}(\mathbb{F}_{q^s})-\sharp H_{f_1f_2}(\mathbb{F}_{q^s})$

$Z(H_{\langle f_1,f_2\rangle/\mathbb{F}};T)=\frac{Z(H_{f_1/\mathbb{F}_q};T)Z(H_{f_1/\mathbb{F}_q};T)}{Z(H_{f_1f_2/\mathbb{F}_q};T)}$

$m\geq 2$:

$H_{f_1,\ldots,f_m}(\mathbb{F}_{q^s})=\cap_{1\leq j\leq m}H_{f_j}(\mathbb{F}_{q^s})$

$$\begin{aligned} N_s &= \sharp(H_{f_1,\ldots,f_m}(\mathbb{F}_{q^s})) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \sharp(H_{f_j}(\mathbb{F}_{q^s})) - \sum_{1\leq i<j\leq m} \sharp H_{f_i f_j}(\mathbb{F}_{q^s}) \\ &\quad + \ldots + (-1)^{r+1} \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_r\leq m} \sharp H_{f_{i_1}\ldots f_{i_r}}(\mathbb{F}_{q^s}) \\ &\quad + \ldots + (-1)^{m-1} \sharp H_{f_1\ldots f_m}(\mathbb{F}_{q^s}) \end{aligned}$$

eşitliği sonucu $Z(H_{f_1,\ldots,f_m/\mathbb{F}_q};T) \in \mathbb{Q}[T]$ olduğu çıkar.

K : cisim.

$\tilde{f}(x_0,\ldots,x_n), \tilde{f}_1(x_0,\ldots,x_n),\ldots,\tilde{f}_m(x_0,\ldots,x_n) \in K[x_0,\ldots,x_n]$ homojen olsun.

E/K cisim genişlemesi için

$\tilde{H}_{\tilde{f}}(E) = \{[x_0 : \ldots : x_n] \in \mathbb{P}^n_E | \tilde{f}(x_0,\ldots,x_n) = 0\}$

$\tilde{f}$ tarafından tanımlanan projektif hiperyüzeyin E noktalarıdır.

Sonuç $\tilde{f} \in \mathbb{F}_q[x_0,\ldots,x_n]$ homojen olsun.

$N_s = \sharp(\tilde{H}_{\tilde{f}}(\mathbb{F}_{q^s})$ ve $Z(\tilde{H}_{\tilde{f}/\mathbb{F}_q};T) = \exp\left(\sum_{s=1}^{\infty} \frac{N_s}{s} T^s\right)$ olsun. Bu durumda $Z(\tilde{H}_{\tilde{f}/\mathbb{F}_q};T) = \frac{A(T)}{B(T)}$ ve $A(T), B(T) \in \mathbb{Q}[T],\ B(T) \neq 0$ olur.

İspat:

$\mathbb{P}^n_{\mathbb{F}_{q^s}} = \amalg_{i=0}^{n} \mathbb{A}^i_{\mathbb{F}_{q^s}}$

Bu nedenle

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{\tilde{f}}(\mathbb{F}_{q^s}) &= \tilde{H}_{\tilde{f}}(\mathbb{F}_{q^s}) \cap \mathbb{A}^n_{\mathbb{F}_{q^s}} \amalg \ldots \\ &\quad \ldots \amalg \tilde{H}_{\tilde{f}}(\mathbb{F}_{q^s}) \cap \mathbb{A}^i_{\mathbb{F}_{q^s}} \\ &\quad \ldots \amalg \tilde{H}_{\tilde{f}}(\mathbb{F}_{q^s}) \cap \mathbb{A}^0_{\mathbb{F}_{q^s}} \end{aligned}$$

parçalanışı vardır.

Ayrıca, $\tilde{H}_{\tilde{f}}(\mathbb{F}_{q^s}) \cap \mathbb{A}^i_{\mathbb{F}_{q^s}} = H_{f_i}(\mathbb{F}_{q^s})$

$f_i(x_0,x_1,\ldots,x_{i-1}) = \tilde{f}(x_0,x_1,\ldots,x_{i-1},1,0,\ldots,0) \in \mathbb{F}_q[x_0,\ldots,x_{i-1}]$ olmak üzere.

$Z(\tilde{H}_{\tilde{f}/\mathbb{F}_q};T) = \prod_{i=0}^{n} Z(H_{f_i/\mathbb{F}_q};T)$

Sonuç $\tilde{f}_1,\ldots,\tilde{f}_m \in \mathbb{F}_q[x_0,\ldots,x_n]$ homojen olsun. $N_s = \sharp(\tilde{H}_{\tilde{f}_1,\ldots,\tilde{H}_{\tilde{f}_m}}(\mathbb{F}_{q^s}))$ ve $Z(\tilde{H}_{\tilde{f}_1,\ldots,\tilde{f}_m/\mathbb{F}_q};T) = \exp(\sum_{s=1}^{\infty} \frac{N_s}{s} T^s)$ olsun. Bu durumda,

$Z(\tilde{H}_{\tilde{f}_1,\ldots,\tilde{f}_m/\mathbb{F}_q};T) = \frac{A(T)}{B(T)}$ ve $A(T), B(T) \in \mathbb{Q}[T]$ $B(T) \neq 0$ olur.

İspat: Tekrar kombinatorik ifademizi kullanarak ispatlanır.

"Global" Zeta fonksiyonları

$f(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_n]$ olsun. Her p asal sayısı için katsayıları mod p de düşünelim.

$f(x_1,\ldots,x_n) \bmod p \in \mathbb{F}_p[x_1,\ldots,x_n]$

Dwork'un teoremi $Z(H_{f \mathrm{mod} p/\mathbb{F}_p}; T) \in \mathbb{Q}[T]$.

Tanım 19. $f(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_n]$ polinomu için "global" zeta fonksiyonu

$$Z(f,s) = \prod_{p:\text{asal}} Z(H_{f \mathrm{mod} p/\mathbb{F}_p}; q^{-s}) \; s \in \mathbb{C}$$

Not: Burada N_s ve N_{fs} ilişkisine değinildi.

Örnek:

$$Z(\mathbb{A}^n/\mathbb{F}_q; T) = \exp(\sum_{s=1}^{\infty} \frac{N_s}{s} T^s)$$

$N_s = \sharp(\mathbb{A}^n(\mathbb{F}_{q^s})) = q^{sn}$

Bu durumda $\exp(-\log(1-q^nT)) = \frac{1}{1-q^nT}$

$Z(\mathbb{A}^n_{\mathbb{F}_q}; T) = \exp(\sum \frac{N_s}{s} T^s) = \exp(-\log(1-q^nT)) = \frac{1}{1-q^nT}$

Bu örnekte, $n = 0$ ve hiperyüzeyi tanımlayan polinom $f = 0$ polinomu olursa:

$Z(H_f; T) = \frac{1}{1-T}$ olur.

Riemann-zeta fonksiyonu ile yukarıdaki fonksiyonların ilişkisi:

$\prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} = \sum_n 1/n^s = \zeta(s)$

eşitliğinden gelmektedir. (Burada $s > 1$.)

Bölüm 9

Zeta fonksiyonunun $p-$sel meromorf olması ispatının detayları

Kuvvet serileri ile ilgili bir özelliğin ispatı ve zeta fonksiyonunun $p-$sel meromorf olması ispatının detaylarıbu bölümde yer almaktadır.

9.1 Kuvvet serileri ile ilgili bir özelliğin ispatı

$$F(X) = \sum a_i X^i \in 1 + X\mathbb{Q}_p[[X]]$$

Bu durumda, $F[X] \in 1 + X\mathbb{Z}_p[[X]]$ ancak ve ancak $F(X^p)/(F(X))^p \in 1 + pX\mathbb{Z}_p[[X]]$

(i) $F(X) \in 1 + X\mathbb{Z}_p[[X]]$ olduğunda, $F(X^p) - (F(X))^p \in pX\mathbb{Z}_p[[X]]$ olur. Burada, $a, b \in \mathbb{Z}_p$ için, $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \bmod p$ ve $a^p \equiv a \bmod p$ olduğunu kullanmaktayız.

$\frac{1}{p}(F(X^p) - (F(X))^p) = G(X) \in X\mathbb{Z}_p[[X]]$ olsun.

$(F(X))^p \in 1 + X\mathbb{Z}_p[[X]]$ de tersinir oluğu için,

$$\frac{F(X^P)}{(F(X))^p} = 1 + \frac{pG(X)}{(F(X))^p} \in 1 + pX\mathbb{Z}_p[[X]]$$

olur.

(ii) Diğer yön için, $G(X) = \frac{F(X^p)}{(F(X))^p} \in 1 + pX\mathbb{Z}_p[[X]]$ olsun, ve $G(X) = \sum b_i X^i$ olarak yazalım.

Şimdi de tümevarımla $a_i \in \mathbb{Z}_p$ olduğunu gösterelim. Varsayım gereği $a_0 = 1$. Varsayalım ki, her $i < n$ için $a_i \in \mathbb{Z}_p$ olsun. O zaman, $F(X^p) = (F(X))^p G(X)$ eşitliğinde katsayıları eşitleyerek $a_n \in \mathbb{Z}_p$ olduğu elde edilir.

Daha açık olarak, X^n teriminin $F(X^p)$ de katsayısı, $p|n$ ise $a_{n/p}$ ve $p \not| n$ ise 0 olur. Diğer tarafta ise, X^n katsayısı, $(F(X))^pG(X) = (\sum a_iX^i)^p(1+\sum b_iX^i)$ seri açılımında, her iki serinin X^n terimine kadar olan terimlerinden elde edilebilir, yani $(\sum_{i=0}^n a_iX^i)^p(1+\sum_{i=1}^n b_iX^i)$ polinomunun X^n teriminin katsayısına eşittir. Bu polinomu açıp, $p|n$ durumunda $a_{n/p}$ terimini (dikkat $a_{n/p} \equiv a_{n/p}^p \bmod p$) çıkardığımızda, kalan ifade pa_ne $p\mathbb{Z}_p$de olan terimlerin eklenmesiyle elde edilen bir terimdir. Bu nedenle de $a_n \in \mathbb{Z}_p$ olur.

Bu lemma, $\gamma(X,Y) = (1+Y)^X(1+Y^p)^{(X^p-X)/p}(1+Y^{p^2})^{(X^{p^2}-X)/p^2}\dots(1+Y^{p^n})^{(X^{p^n}-X^{p^{n-1}})/p^n}\dots$ şeklinde tanımlanan kuvvet serisine uygulanır. ($\gamma(X,Y) = \prod_n(1+Y^{p^n})^{(X^{p^n}-X^{p^{n-1}})/p^n}$)

$$\frac{\gamma(X^p,Y^p)}{(\gamma(X,Y))^p} = \frac{(1+Y^p)^X}{(1+Y)^{pX}}$$

eşitliği sadeleşme sonucu elde edilir.

$$(1+Y^p)/(1+Y)^p = 1+pYG(Y),\ G(Y) \in \mathbb{Z}_p[[Y]]$$

olacağından, $\frac{(1+Y^p)^X}{(1+Y)^{pX}} \in 1+pX\mathbb{Z}_p[[X,Y]]+pY\mathbb{Z}_p[[X,Y]]$ olduğu sonucu çıkarılır. (Burada, $(1+Y)^X = \sum_{i=0}^\infty \frac{X(X-1)\dots(X-i+1)}{i!}Y^i$ seri açılımı kullanılır.)

Yukarıdaki açıklamaya ek olarak:

$F(X) = \sum a_iX^i \in 1+X\mathbb{Z}_p[[X]]$ ise, $F(X^p)-(F(X))^p \in pX\mathbb{Z}_p[[X]]$.

$$\begin{aligned} F(X^p)-(F(X))^p &= \sum a_iX^{pi} - \sum a_{i_1}\dots a_{i_p}X^{i_1+\dots+i_p} \\ &= \sum a_iX^{pi} - \sum_n\left(\sum_{i_1+\dots+i_p=n} a_{i_1}\dots a_{i_p}\right)X^n \\ &= \sum a_iX^{pi} - \sum_n\left(\sum_{\substack{\nu_1 i_1+\dots+\nu_k i_k=n \\ i_1<\dots<i_k}} C(p;\nu_1,\dots,\nu_k)a_{i_1}^{\nu_1}\dots a_{i_k}^{\nu_k}\right)X^n \\ &= \sum_{p|n}(a_{n/p}-a_{n/p}^p)X^n - \sum_n \sum_{\substack{\nu_1 i_1+\dots+\nu_k i_k=n \\ i_1<\dots<i_k,\ k>1}} C(p;\nu_1,\dots,\nu_k)a_{i_1}^{\nu_1}\dots a_{i_k}^{\nu_k}X^n \end{aligned}$$

–

$$(\sum a_iX^i)^p(1+\sum b_ix_i) = \sum a_{i_1}\dots a_{i_p}X^{i_1+\dots+i_p} + \sum a_{i_1}\dots a_{i_p}b_jX^{i_1+\dots+i_p+j}$$

X^n katsayısı:

$\sum_{i_1+\dots+i_p=n} a_{i_1}\dots a_{i_p} + \sum_{i_1+\dots+i_p+j=n} a_{i_1}\dots a_{i_p}b_j$

Bu toplamda şöyle ayrıştırılır:

$pa_na_0^{p-1} + \sum_{i_1+\dots+i_p=n,\ i_k<n} a_{i_1}\dots a_{i_p} + \sum_{i_1+\dots+i_p+j=n} a_{i_1}\dots a_{i_p}b_j$

Dikkat, b_j içeren toplamda, $j \geq 1$ olduğu için, i indeksleri $< n$ olacak.

Şimdi de, herhangi bir $a_{i_1} \ldots a_{i_p}$ çarpımının, multinom katsayısı, $a_{i_1} = \ldots = a_{i_p} = \frac{n}{p}$ durumu haricinde, p ile bölünür.

$$\begin{aligned}
& p a_n a_0^{p-1} + \sum_{i_1+\ldots+i_p=n,\ i_k<n} a_{i_1} \ldots a_{i_p} + \sum_{i_1+\ldots+i_p+j=n} a_{i_1} \ldots a_{i_p} b_j \\
= \ & p a_n a_0^{p-1} + \sum_{\substack{\nu_1 i_1+\ldots+\nu_k i_k=n \\ i_1<\ldots<i_k<n}} C(p;\nu_1,\ldots,\nu_k) a_{i_1}^{\nu_1} \ldots a_{i_k}^{\nu_k} + \sum_{i_1+\ldots+i_p+j=n} a_{i_1} \ldots a_{i_p} b_j
\end{aligned}$$

Burada $C(p;*)$ bir multinom katsayısıdır. Tam olarak da, ilk satırda, $i_1 = \ldots = i_{\nu_1} < i_{\nu_1+1} = \ldots = i_{\nu_1+\nu_2} < \ldots < i_{\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_{k-1}+1} = \ldots = i_{\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_{k-1}+\nu_k}$ ve $\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_{k-1} + \nu_k = p$ için, $\frac{p!}{\nu_1!\ldots\nu_k!}$ sayısına eşittir, çünkü ilk satırda, bu çeşit terimler, o kadar sayıda yer alır. Bu durumda toplamda yer alan terim ise $a_{i_1} \ldots a_{i_p} = a_{i_1}^{\nu_1} \ldots a_{i_{\nu_1+\ldots+\nu_{k-1}+1}}^{\nu_k}$ olur, ve indeksleri yeniden tanımladığımızda, ikinci satırı elde ederiz.

Sadece $k = 1$ (ve sonuç olarak $\nu_1 = p$) durumunda, yani $a_{i_1} = \ldots = a_{i_p} = a_{n/p}$ durumunda) p ile bölünmez. Bu durum için de $p|n$ olmalı.

Böylece, $a_0 = 1$ ve $b_j \in p\mathbb{Z}_p$ olduğu da dikkate alınarak,

$n \not| p$ durumunda, X^n katsayısı, tümevarım varsayımı $i < n$ için $a_i \in \mathbb{Z}_p$altında, $pa_n + p\mathbb{Z}_p$ elemanı olur.

$n|p$ durumunda ise, $pa_n + a_{n/p}^p + p\mathbb{Z}_p$ elemanı olur.

Bu katsayı ise $\sum a_i X^{pi}$ serisinin X^n teriminin katsayısına eşit olduğundan, $n \not| p$ durumunda 0 ve $n|p$ durumunda $a_{n/p}$ ye eşit olacak, böylece, $pa_n \in p\mathbb{Z}_p$ ve $a_n \in \mathbb{Z}_p$ olacaktır. (Burada $a_{n/p}^p - a_{n/p} \in p\mathbb{Z}_p$ olduğu kullanılmakta.)

9.2 $p-$sel meromorf ispatının sonu

$$\sum_{x_0,x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{F}_{q^s}^\times} \epsilon^{\mathrm{Tr}(x_0 f(x_1,\ldots,x_n))} = q^s N_s' - (q^s-1)^n$$

$x_0 f(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{F}_q[x_0,\ldots,x_n]$ polinomunun katsayılarını teichmüller temsilcileri ile değiştirerek, $\sum_{i=1}^N a_i X^{w_i} \in \Omega[X] = \Omega[x_0,\ldots,x_n]$ elde ederiz. Burada X^{w_i} ile $x_0^{w_{i,0}} \ldots x_n^{w_{i,n}}$ monomu kastedilir, ve $w_i = (w_{i,0},\ldots,w_{i,n})$ olur.

Hatırlatmalar:

$$R = \Omega[[x_1,\ldots,x_n]]$$

Ω katsayılı $n-$ değişkenli kuvvet serisi halkası olmak üzere, R, Ω üzerinde sonsuz boyutlu bir vektör uzayıdır. Her $G \in R$ için, G ile (soldan) çarpma, doğrusal bir dönüşümdür.

Ayrıca, her pozitif tamsayı q için T_q diye bir doğrusal dönüşüm tanımlayalım:

$$r = \sum a_u X^u \mapsto T_q(r) = \sum a_{qu} X^u$$

Burada, u bir çoklu indekstir. $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$. Ayrıca, $qu = (qu_1, \ldots, qu_n)$ olarak tanımlanır. $X^u = x_1^{u_1} \ldots x_n^{u_n}$ olur.

$$\Psi_{q,G} = T_q \circ G$$

olarak tanımlansın. Açıkça, $G = \sum_{w \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}} g_w X^w$ için:

$$\Psi_{q,G}(X^u) = T_q(\sum_w g_w X^{w+u}) = \sum_v g_{qv-u} X^v$$

olur. Burada ikinci toplamda $qv - u$ negatif sayılar içerecek olursa, katsayı g_{qv-u} sıfır alınır.

Ayrıca, $G_q(X) = G(X^q)$ olarak tanımlansın.

Böylece

$$G \circ T_q = T_q \circ G_q = \Psi_{q,G_q}$$

olur.

İndeks kümesi $U = \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ üzerinde, $|\cdot|$ gönderimi

$$|u| = \sum_{i=1}^{n} u_i$$

olarak tanımlansın.

$$R_0 = \{G = \sum g_w X^w \in R \,|\, M > 0, \text{ vardır ki} \operatorname{mer}_p g_w \geq M|w| \text{ her } w \in U \text{ için}\}$$

olsun. R_0 çarpma altında kapalı ve $G \mapsto G_q$ gönderimleri altında kendisine gitmektedir. Ayrıca, R_0daki kuvvet serileri, tüm değişkenler $D(1)$den kesin büyük bir diskte olduğunda yakınsaktır.

Bunun bir örneği, herhangi bir monom X^w için, $\Theta(aX^w)$ kuvvet serisidir. Burada $a \in D(1)$. (Alıştırma)

Not burada ϵ Ωdaki p. birim kök, $\lambda = \epsilon - 1$, $\operatorname{mer}_p \lambda = 1/(p-1)$ olduğu ispatlanmıştı. Burada, $\Theta(T) = \gamma(T, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n$ ve $a_n = \sum_{m=n}^{\infty} a_{m,n} \lambda^n$ olarak tanımlanır.

Bir metrik cisim üzerindeki sonsuz boyutlu vektör uzaylarında, sonsuz matrislerin izinden (A

sonsuz matris iken $\mathrm{Tr}(A)$dan) bahsetmek, $\sum_{i=1}^{\infty} a_{ii}$ serisi yakınsak olduğunda mümkündür.

Lemma $G \in R_0$, ve $\Psi = \Psi_{q,G}$ olsun. Bu durumda, $\mathrm{Tr}(\Psi^s)$, $s = 1, 2, 3, \ldots$ için yakınsaktır, ve

$$(q^s - 1)^n \mathrm{Tr}(\Psi^s) = \sum_{x \in \Omega^n \; x^{q^s-1}=1} G(x)G(x^q)\ldots G(x^{q^{s-1}}),$$

olur. Burada $x = (x_1, \ldots, x_n)$ ve $x^{q^i} = (x_1^{q^i}, \ldots, x_n^{q^i})$ ve $x^{q^s-1} = 1$ ise $x_j^{q^s-1} = 1$ her $j = 1, \ldots, n$ için.

$$\sum_{x_i \in \Omega, \, x_i^{q-1}=1} x_i^{w_i} = \begin{cases} q-1, & \text{eğer} q-1 | w_i \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

gözlemini kullanarak, $s = 1$ için ispatlanır.

Genel durum için ise, $\Psi^s = \Psi_{q^s, G \cdot G_q \ldots G_{q^{s-1}}}$ olduğu gözlemine dayanır.

Sonlu matrislerde $\det(1 - At) = \sum_{m=0}^{n} b_m t^m$ polinomu önemlidir. Burada

$$b_m = (-1)^m \sum_{1 \le u_1, \ldots u_m \le r \; \sigma \, \text{permutesu}'\text{s}} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{u_1, \sigma(u_1)} \cdots a_{u_m, \sigma(u_m)}$$

olur.

Bu tanımlar sonsuz matrislere de genelleştirilir.

Öte yandan, $A = \{g_{qv-u}\}_{u,v \in U}$ için, $\Psi = T_q \circ G$ ve $G \in R_0$ ve $\mathrm{mer}_p g_w \ge M|w|$ olduğunda,

$$\begin{aligned} \mathrm{mer}_p[g_{q\sigma(u_1)-u_1} \cdots g_{q\sigma(u_m)-u_m}] & \\ & \ge M[|q\sigma(u_1) - u_1| + \ldots + |q\sigma(u_m) - u_m|] \\ & \ge M[\sum q|\sigma(u_i)| - \sum |u_i|] = M(q-1) \sum |u_i| \end{aligned}$$

olacağından, $m \to \infty$ için

$$\mathrm{mer}_p b_m \to \infty$$

ve

$$\frac{1}{m} \mathrm{mer}_p b_m \to \infty$$

olur. (Burada $|u|$ değeri sabit olan $u$ların sayısı sonludur, ve ortalama $|u|$ farklıu_i lerin kümesinde değişirken, sonsuza yaklaşır.

Bu $\det(1 - At)$nin iyi tanımlı (her b_m için yakınsak) olduğunu gösterir, ve yakınsaklık yarıçapı sonsuz olur.

Yan sonuç olarak,

$$\det(1-At)=\exp_p\left(-\sum_{s=1}^{\infty}\mathrm{Tr}(A^s)T^s/s\right)$$

olacağı da elde edilir. İspat için, matrislerin üçgenleştirilmesi (diagonal altındaki terimleri sıfır bir matrise eşlenik olması) ve eşlenik matrislerin determinantlarının aynı olması dikkate alınır.

Sonsuz matrislere olan genelleştirilme alıştırma.

Şimdi de ispata geri dönelim.

$$\sum_{x_0,x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{F}_{q^s}^{\times}}\epsilon^{\mathrm{Tr}(x_0f(x_1,\ldots,x_n))}=q^sN_s'-(q^s-1)^n$$

denkleminde, $x_0f(x_1,\ldots,x_n)$ polinomu katsayıları değişikliği sonrasında, $x_0f(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^{N}a_iX^{w_i}$ ve a_i ise teichmüller temsilcileriolmak üzere,

$$\begin{aligned}
q^sN_s' &= (q^s-1)^n+\sum_{x_0,x_1,\ldots,x_n\in\mathbf{F}_{q^s}}\epsilon^{\mathrm{Tr}(x_0f(x_1,\ldots,x_n))}\\
&= (q^s-1)^n+\sum_{\substack{x_0,\ldots,x_n\in\Omega,\\ x_0^{q^s-1}=\ldots=x_n^{q^s-1}=1}}\prod_{i=1}^{N}\Theta(a_ix^{w_i})\Theta(a_i^px^{pw_i})\ldots\Theta(a_i^{p^{rs-1}}x^{p^{rs-1}w_i})
\end{aligned}$$

Şimdi, $f(X_1,\ldots,X_n)$ katsayılarının $\mathbb{F}_q$da ve $q=p^r$ olması sonucu $a_i^{p^r}=a_i$ olur ve

$$G(X_0,\ldots,X_n)=\prod_{i=1}^{N}\Theta(a_iX^{w_i})\Theta(a_i^pX^{pw_i})\ldots\Theta(a_i^{p^{r-1}}X^{p^{r-1}w_i}),$$

olarak tanımlansın. Böylece,

$$q^sN_s'=(q^s-1)^n+\sum_{\substack{x_0,x_1,\ldots,x_n\in\Omega,\\ x_0^{q^s-1}=\ldots=x_n^{q^s-1}=1}}G(x)\cdot G(x^q)\cdot G(x^{q^2})\ldots G(x^{q^{s-1}}).$$

olur. (Burada $G(x)=G(x_0,\ldots,x_n)$ demek.) $\Theta(a_i^{p^j}X^{p^jw_i})$ serileri R_0da (alıştırma) olduğu için Gde R_0da olur. Yukarıda ispatlamış olduğumuz lemma sonucu,

$$q^sN_s'=(q^s-1)^n+(q^s-1)^{n+1}\mathrm{Tr}(\Psi^s)$$

olur ve böylece

$$N'_s = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i q^{s(n-i-1)} + \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i \left(\begin{array}{c} n+1 \\ i \end{array}\right) q^{s(n-i)}\mathrm{Tr}(\Psi^s).$$

olur. Burada A, Ψnin matrisi olmak üzere,

$$\Delta(T) = \det(1-At) = \exp_p\left\{-\sum_{s=1}^{\infty}\mathrm{Tr}(\Psi^s)T^s/s\right\}$$

olarak tanımlansın.

Bu durumda,

$$\begin{aligned}
Z'(H_f/\mathbb{F}_q;T) &= \exp_p\left\{\sum_{s=1}^{\infty}N'_sT^s/s\right\} \\
&= \prod_{i=0}^{n}\left[\exp_p\left\{\sum_{s=1}^{\infty}q^{s(n-i-1)}T^s/s\right\}\right]^{(-1)^i\left(\begin{array}{c} n \\ i \end{array}\right)} \\
&\quad \times\prod_{i=0}^{n+1}\left[\exp_p\left\{\sum_{s=1}^{\infty}q^{s(n-i)}\mathrm{Tr}(\Psi^s)T^s/s\right\}\right]^{(-1)^i\left(\begin{array}{c} n+1 \\ i \end{array}\right)} \\
&= \prod_{i=1}^{n}(1-q^{n-i-1}T)^{(-1)^{i+1}\left(\begin{array}{c} n \\ i \end{array}\right)}\prod_{i=0}^{n+1}\Delta(q^{n-i}T)^{(-1)^{i+1}\left(\begin{array}{c} n+1 \\ i \end{array}\right)}
\end{aligned}$$

Şimdi de, bu çarpımda her terim $p-$adik tam fonksiyon (ya da çarpmaya göre tersi) olduğu için, zeta fonksiyonunun $p-$adik meromorf olduğu ispatlanmış olur.

Kaynaklar

[1] F. Q. Gouvêa, **p-adic Numbers: An Introduction**, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1993.

[2] N. Koblitz, **p-adic Numbers, p-adic Analysis, and Zeta Functions**, 2nd edition, Graduate Texts in Mathematics Vol. 58, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1984.